

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU	4
CHƯƠNG 1. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH	5
1. Một số ví dụ về bài toán quy hoạch tuyến tính	5
1.1. Bài toán lập kế hoạch sản xuất	5
1.2. Bài toán phân công lao động	6
1.3. Bài toán vận tải	7
2. Bài toán quy hoạch tuyến tính	8
2.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát	8
2.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc và chuẩn tắc	10
2.3. Chuyển đổi dạng bài toán quy hoạch tuyến tính	12
3. Thuật toán đồ thị giải bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến	14
3.1. Nhận xét	14
3.2. Thuật toán đồ thị giải bài toán quy hoạch tuyến tính	14
4. Một số yếu tố hình học trong không gian $\mathbb{R}^n$	17
4.1. Tập hợp lồi	17
4.2. Các tính chất của tập hợp lồi	18
5. Các tính chất cơ bản của bài toán quy hoạch tuyến tính	18
5.1. Các giả thiết ban đầu	18
5.2. Các tính chất cơ bản của bài toán quy hoạch tuyến tính	19
6. Cơ sở lý luận của phương pháp đơn hình	28
6.1. Cơ sở lý luận của phương pháp đơn hình	28
6.2. Công thức đổi tọa độ và bảng đơn hình	33
6.3. Bài toán suy biến	38
7. Phương pháp tìm phương án cực biên xuất phát	39
7.1. Bài toán giả tạo	39
7.2. Mối quan hệ về phương án tối ưu của bài toán chính tắc và bài toán giả tạo	42

CHƯƠNG 2. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH ĐỐI NGẪU	45
1. Khái niệm bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu	45
1.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu không đối xứng	45
1.2. Quy tắc thành lập bài toán đối ngẫu	47
1.3. Bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu đối xứng	49
2. Các định lý đối ngẫu	51
3. Phương pháp đơn hình đối ngẫu	55
3.1. Nội dung phương pháp	55
3.2. Thuật toán đơn hình đối ngẫu	56
CHƯƠNG 3. BÀI TOÁN VẬN TẢI	59
1. Các khái niệm và tính chất của bài toán vận tải	59
1.1. Nội dung kinh tế và mô hình toán học của bài toán vận tải	59
1.2. Mô hình bảng của bài toán vận tải	63
1.3. Tính chất của bài toán vận tải cân bằng thu phát	65
2. Thuật toán thế vị giải bài toán vận tải cân bằng thu phát	67
2.1. Phương pháp tìm phương án cực biên xuất phát	67
2.2. Tiêu chuẩn tối ưu cho một phương án của bài toán vận tải cân bằng thu phát	71
2.3. Phương pháp cải tiến phương án	73
3. Bài toán vận tải không cân bằng thu phát	81
3.1. Phát lớn hơn thu	81
3.2. Phát ít hơn thu	86
4. Bài toán phân phối	90
4.1. Định nghĩa	91
4.2. Phương pháp giải	91
5. Bài toán ô cấm	96
CHƯƠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH	99
I. BÀI TOÁN SẢN XUẤT ĐỒNG BỘ	

1. Các khái niệm và tính chất của bài toán sản xuất đồng bộ	99
1.1. Nội dung kinh tế và các mô hình toán học của bài toán sản xuất đồng bộ	99
1.2. Tính chất của bài toán sản xuất đồng bộ	103
2. Phương pháp nhân tử giải bài toán sản xuất đồng bộ	107
2.1. Phương pháp tìm phương án cực biên suy rộng ban đầu	107
2.2. Xây dựng hệ thống số kiểm tra và tiêu chuẩn tối ưu	110
2.3. Điều chỉnh phương án	111
2.4. Thuật toán nhân tử giải bài toán sản xuất đồng bộ	113
II. BÀI TOÁN TRÒ CHƠI MA TRẬN	117
1. Một số khái niệm mở đầu	117
1.1. Ví dụ về trò chơi ma trận	117
1.2. Bài toán trò chơi ma trận	117
1.3. Hàm thu hoạch của P	118
2. Điểm yên ngựa và chiến lược tối ưu	120
2.1. Điểm yên ngựa	120
2.2. Chiến lược tối ưu	121
2.3. Trò chơi đối xứng	122
3. Phương pháp tìm chiến lược tối ưu cho bài toán trò chơi ma trận	123
3.1. Đưa trò chơi ma trận về bài toán quy hoạch tuyến tính	123
3.2. Phương pháp tìm chiến lược tối ưu cho bài toán trò chơi ma trận	125
TÀI LIỆU THAM KHẢO	128

LỜI NÓI ĐẦU

Toán học và kinh tế là hai lĩnh vực có mối quan hệ gắn bó với nhau. Kinh tế là nguồn cảm hứng cho toán học thực hiện khả năng tiềm năng của mình, còn toán học là công cụ giúp cho việc phân tích, giải quyết các vấn đề kinh tế một cách chặt chẽ, hợp lý và hiệu quả. Toán kinh tế là việc nghiên cứu để mô tả các vấn đề kinh tế dưới dạng mô hình toán học thích hợp và từ góc độ toán học sẽ tìm ra lời giải cho mô hình đó, từ đó giúp các nhà kinh tế tìm ra các giải pháp tối ưu cho bài toán kinh tế.

Để đáp ứng nhu cầu giảng dạy và học tập môn Toán kinh tế cho sinh viên hệ đại học và cao đẳng, chúng tôi đã biên soạn cuốn giáo trình này. Giáo trình không đi sâu vào các vấn đề lý luận và các kỹ thuật toán học phức tạp mà chỉ tập trung trình bày những nội dung cơ bản và các thuật toán chính của lý thuyết tối ưu tuyến tính. Nhằm giúp sinh viên rèn luyện kỹ năng trong giáo trình có đầy đủ các ví dụ cụ thể mô tả từng tình huống, hướng dẫn tỉ mỉ toàn bộ quá trình giải quyết vấn đề.

Nội dung giáo trình gồm 4 chương:

Chương 1. Bài toán quy hoạch tuyến tính

Chương 2. Bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu

Chương 3. Bài toán vận tải

Chương 4. Một số bài toán ứng dụng của bài toán quy hoạch tuyến tính

Mặc dù có nhiều cố gắng, nhưng giáo trình này chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong được bạn đọc góp ý để cuốn sách ngày càng hoàn thiện.

Các tác giả

Chương 1

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1. MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1.1. Bài toán lập kế hoạch sản xuất

1.1.1. Nội dung bài toán

Một cơ sở sản xuất có thể sản xuất được hai loại sản phẩm A và B, từ các nguyên liệu I, II, III. Chi phí từng loại nguyên liệu và tiền lãi của một đơn vị sản phẩm, cũng như dự trữ nguyên liệu cho trong Bảng 1.1.

Bảng 1.1

Nguyên liệu Sản phẩm	I	II	III	Lãi (đơn vị tiền)
A	2	0	1	3
B	1	1	0	5
Dự trữ	8	4	3	

Hãy lập bài toán thể hiện kế hoạch sản xuất sao cho có tổng số lãi lớn nhất và phù hợp với điều kiện dự trữ nguyên liệu.

1.1.2. Mô hình toán học của bài toán

Gọi x_1 , x_2 lần lượt là số sản phẩm A và B được sản xuất. Khi đó:

Tổng số lãi là: $3x_1 + 5x_2$

Tổng số nguyên liệu I cần sử dụng là: $2x_1 + x_2$

Tổng số nguyên liệu II cần sử dụng là: x_2

Tổng số nguyên liệu III cần sử dụng là: x_1

Theo bài ra, ta có mô hình toán học: Tìm $X(x_1, x_2)$ sao cho

$$f(X) = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 3 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2} \end{cases}.$$

1.2. Bài toán phân công lao động

1.2.1. Nội dung bài toán

Một phân xưởng có 4 dây chuyền sản xuất khác nhau có thể sản xuất 3 loại sản phẩm. Lượng sản phẩm mỗi loại sản xuất ra được khi sử dụng một dây chuyền sản xuất mỗi loại trong một giờ và chi phí sản xuất ở dây chuyền đó sau một giờ hoạt động cùng với nhu cầu tối thiểu về các sản phẩm được cho bởi Bảng 1.2.

Bảng 1.2

Sản phẩm (SP)	Dây chuyền sản xuất				Nhu cầu tối thiểu
	I	II	III	IV	
SP 1	2	3	1	1	1600
SP 2	1	2	3	4	2200
SP 3	3	1	4	5	2000
Chi phí (1000đ)	10	5	13	16	

Hãy lập bài toán để bố trí thời gian cho các dây chuyền sản xuất sao cho thỏa mãn nhu cầu tối thiểu về các sản phẩm đồng thời tổng chi phí sản xuất thấp nhất.

1.2.2. Mô hình toán học của bài toán

Gọi x_j là thời gian (giờ) áp dụng dây chuyền sản xuất thứ j ($j = \overline{1,4}$) khi đó:

Tổng chi phí sản xuất là: $10x_1 + 5x_2 + 13x_3 + 16x_4$ (1000đ)

Tổng lượng sản phẩm 1 sản xuất ra là: $2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4$

Tổng lượng sản phẩm 2 sản xuất ra là: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$

Tổng lượng sản phẩm 3 sản xuất ra là: $3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4$

Theo bài ra, ta có mô hình toán học: Tìm $X(x_1, x_2, x_3, x_4)$ sao cho

$$f(X) = 10x_1 + 5x_2 + 13x_3 + 16x_4 \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \geq 1600 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 2200 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 \geq 2000 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4} \end{cases}$$

1.3. Bài toán vận tải

1.3.1. Nội dung bài toán

Một đơn vị vận tải cần vận chuyển xi măng từ 3 kho K_1, K_2, K_3 tới 4 công trường xây dựng T_1, T_2, T_3, T_4 . Cho biết lượng xi măng có ở mỗi kho, lượng xi măng cần ở mỗi công trường và giá cước vận chuyển (ngàn đồng) 1 tấn xi măng từ mỗi kho tới mỗi công trường như Bảng 1.3.

Bảng 1.3

Kho xi măng	Công trường xây dựng			
	T_1 : 130 tấn	T_2 : 160 tấn	T_3 : 120 tấn	T_4 : 140 tấn
K_1 : 170 tấn	20	18	22	25
K_2 : 200 tấn	15	25	30	15
K_3 : 180 tấn	45	30	40	35

Hãy lập bài toán tìm kế hoạch vận chuyển xi măng từ các kho tới các công trường sao cho tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất và mọi kho đều phát hết lượng xi măng có, mọi công trường nhận đủ lượng xi măng cần?

1.3.2. Mô hình toán học của bài toán

Gọi x_{ij} là lượng xi măng cần vận chuyển từ kho i ($i = 1, 2, 3$) tới công trường j ($j = 1, 2, 3, 4$). Khi đó:

Kho K_1 phát hết lượng xi măng có: $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 170$

Kho K_2 phát hết lượng xi măng có: $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 200$

Kho K_3 phát hết lượng xi măng có: $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 180$

Công trường T_1 nhận đủ số xi măng cần: $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 130$

Công trường T_2 nhận đủ số xi măng cần: $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 160$

Công trường T_3 nhận đủ số xi măng cần: $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 120$

Công trường T_4 nhận đủ số xi măng cần: $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 130$

Lượng hàng vận chuyển không âm: $x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$

Tổng chi phí vận chuyển: $f(X) = 20x_{11} + 18x_{12} + 22x_{13} + 25x_{14} + 15x_{21} + 25x_{22} + 30x_{23} + 15x_{24} + 45x_{31} + 30x_{32} + 40x_{33} + 35x_{34}$.

Vậy mô hình toán học của bài toán là: Tìm $X = [x_{ij}]_{3 \times 4}$ sao cho $f(X) \rightarrow \min$ với X thỏa mãn các điều kiện trên.

Tổng quát: Gọi m là số kho chứa hàng (điểm phát), n là số nơi tiêu thụ hàng (điểm thu).

a_i là lượng hàng có (cung) ở điểm phát thứ i ($i = \overline{1, m}$)

b_j là lượng hàng cần (cầu) ở điểm thu thứ j ($j = \overline{1, n}$)

c_{ij} là chi phí vận chuyển một đơn vị hàng từ điểm phát i tới điểm thu j

x_{ij} là lượng hàng vận chuyển cần tìm từ điểm phát i tới điểm thu j .

Mô hình toán học của bài toán vận tải có dạng:

$$f(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n} \end{cases}$$

2. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH (QHTT)

2.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát

Định nghĩa 1.1. Từ các bài toán thực tế đã nêu cùng rất nhiều bài toán khác, ta có thể thấy bài toán QHTT dạng tổng quát có dạng sau:

Tìm vectơ $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sao cho hàm số

$$f(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \text{ (max)} \quad (1.1)$$

$$\text{với điều kiện: } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = \overline{1, p} & (1.2) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, i = \overline{p+1, q} & (1.3) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{q+1, m} & (1.4) \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, k}; \quad x_j \leq 0, j = \overline{k+1, r}; & (1.5) \end{cases}$$

trong đó: p, q, m, k, n, r là các số nguyên thỏa mãn: $0 \leq p \leq q \leq m; 0 \leq k \leq r \leq n$.

x_j là biến số, các hệ số c_j, a_{ij}, b_i ($j = \overline{1, n}; i = \overline{1, m}$).

Khi đó: ▪ Hàm số $f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ được gọi là *hàm mục tiêu*.

▪ Các bất phương trình (1.2) - (1.5) được gọi là *hệ ràng buộc* của bài toán. Các ràng buộc (1.2) - (1.4) được gọi là các *ràng buộc chính* (hay *ràng buộc cưỡng bức*). Các ràng buộc (1.5) gọi là *ràng buộc về dấu* (hay *ràng buộc tự nhiên*) của bài toán.

Định nghĩa 1.2. Véc tơ $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa mãn hệ ràng buộc (1.2) - (1.5) được gọi là *phương án* của bài toán..

Ký hiệu tập hợp các phương án của bài toán QHTT là Ω . Ta có 3 khả năng:

- Bài toán (1.2) — (1.5) có vô số phương án, tức là tập Ω có vô số phần tử.
- Bài toán (1.2) — (1.5) chỉ có 1 phương án, tức là tập Ω chỉ có 1 phần tử.
- Bài toán (1.2) — (1.5) không có phương án nào, tức là tập $\Omega = \emptyset$.

Định nghĩa 1.3. Phương án $X^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ của bài toán (1.2) — (1.5) được gọi là *phương án tối ưu* (PATU) của bài toán nếu:

$$f(X^*) \leq f(X), \forall X \in \Omega \text{ (đối với bài toán } f(X) \rightarrow \min)$$

$$f(X^*) \geq f(X), \forall X \in \Omega \text{ (đối với bài toán } f(X) \rightarrow \max)$$

Chú ý: Tập PATU của bài toán QHTT hoặc một điểm hoặc vô số điểm hoặc không có điểm nào.

Định nghĩa 1.4. Nếu bài toán QHTT có phương án tối ưu thì bài toán được gọi là *giải được* (hay bài toán có lời giải) và phương án tối ưu của bài toán còn gọi là lời giải của bài toán.

Nếu bài toán QHTT không có phương án tối ưu thì bài toán được gọi là *không giải được* (hay bài toán không có lời giải).

Định nghĩa 1.5. Nếu phương án $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ của một bài toán QHTT làm thỏa mãn $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ thì phương án X được gọi là *thỏa mãn chặt ràng buộc i* tương ứng (1.2), hoặc (1.3) hoặc (1.4).

Nếu phương án $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ có $x_j = 0$ thì phương án X được gọi là *thỏa mãn chặt ràng buộc về dấu* tương ứng (nếu có ràng buộc loại $x_j \geq 0$ hoặc $x_j \leq 0$).

Nếu phương án $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa mãn $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j < b_i$ (hoặc $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j < b_i$ hoặc $x_j > 0$ hoặc $x_j < 0$) thì phương án X được gọi là *thỏa mãn lỏng ràng buộc* tương ứng (nếu có).

2.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc và chuẩn tắc

2.2.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

Bài toán QHTT chính tắc có dạng: Tìm $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sao cho

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j \rightarrow \min \quad (1.6)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1, m} \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\begin{cases} x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\text{Nếu ký hiệu } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ là ma trận cấp } m \times n, \text{ gọi là ma trận}$$

ràng buộc của bài toán;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}; \quad O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Khi đó bài toán QHTT chính tắc (1.6) – (1.8) viết được dưới dạng ma trận sau:

$$f(X) = CX \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} AX = B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

Nếu ký hiệu: $A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ là véc tơ cột thứ j ($j = \overline{1, n}$) của ma trận A . Khi đó bài

toán QHTT chính tắc (1.6) – (1.8) viết được dưới dạng véc tơ sau đây:

$$f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_j A_j = B \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Ma trận $\tilde{A} = (A \mid B)$ được gọi là *ma trận bổ sung* (hay còn gọi là *ma trận mở rộng*) của bài toán QHTT dạng chính tắc (1.6) – (1.8).

2.2.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc.

Bài toán QHTT chuẩn tắc có dạng: Tìm $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sao cho

$$f(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \quad (1.9)$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, i = \overline{1, m} \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (1.11)$$

Bài toán QHTT dạng chuẩn tắc (1.9) – (1.11) viết được dưới dạng ma trận như sau:

$$f(X) = CX \rightarrow \min$$
$$\text{với điều kiện } \begin{cases} AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

Bài toán QHTT dạng chuẩn tắc (1.9) – (1.11) viết được dưới dạng vectơ sau đây:

$$f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$
$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_j A_j \geq B \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

2.3. Chuyển đổi dạng bài toán quy hoạch tuyến tính

Bằng cách thực hiện các phép biến đổi nêu dưới đây, ta có thể chuyển bài toán QHTT bất kỳ về bài toán QHTT chính tắc, chuẩn tắc.

a) Nếu ràng buộc có dạng $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$ thì ta thêm biến phụ $x_{n+i} \geq 0$ để có

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i.$$

b) Nếu ràng buộc có dạng $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$ thì ta thêm biến phụ $x_{n+i} \geq 0$ để có

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i.$$

c) Nếu có ẩn x_j nào đó không có ràng buộc về dấu thì ta thay x_j bởi hai biến phụ không âm $x_j^+ \geq 0$ và $x_j^- \geq 0$ sao cho: $x_j = x_j^+ - x_j^-$.

d) Mỗi ràng buộc đẳng thức $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ có thể thay bằng 2 ràng buộc bất đẳng

thức $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$ và $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$.

e) Một ràng buộc $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$ có thể viết lại thành $-\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq -b_i$ hoặc ngược lại.

f) Bài toán tìm cực đại $f \rightarrow \max$ có thể đưa về bài toán tìm cực tiểu $g = -f \rightarrow \min$.

Nhận xét: i) Khi đưa biến phụ x_{n+i} vào thì hệ số của nó trong hàm mục tiêu $f(X)$ là $C_{n+i} = 0$.

ii) Khi đưa biến phụ x_j^+, x_j^- vào thì hệ số của nó trong hàm mục $f(X)$ tương ứng là $C_j^+ = C_j, C_j^- = -C_j$.

iii) Mọi bài toán QHTT đều đưa được về dạng chính tắc và việc giải bài toán QHTT đã cho tương đương với việc giải bài toán QHTT chính tắc tương ứng với nó, theo nghĩa là nếu bài toán dạng chính tắc có PATU' thì từ đó suy ra được PATU' của bài toán ban đầu, còn nếu bài toán chính tắc không có PATU' thì bài toán ban đầu cũng không có PATU'. Nói cách khác: Bài toán ban đầu có PATU' khi và chỉ khi bài toán dạng chính tắc tương ứng với nó có PATU'.

Như vậy, ta chỉ cần tìm cách giải bài toán QHTT chính tắc.

Ví dụ 1.1: Đưa bài toán QHTT sau về dạng chính tắc, dạng chuẩn tắc.

$$\begin{aligned} f(X) &= 2x_1 - x_2 \rightarrow \min \\ \text{với điều kiện } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 \geq 0; x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Giải: * Dạng chính tắc: Bằng cách thay $x_1 = x_4 - x_5$ với $x_4, x_5 \geq 0$ và thêm hai biến phụ $x_6, x_7 \geq 0$, ta đi đến bài toán:

$$f(X) = -x_2 + 2x_4 - 2x_5 \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} -2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 2 \\ -2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 - x_7 = 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ x_j \geq 0; j = \overline{2, 7} \end{cases}$$

* Dạng chuẩn tắc: Bằng cách thay $x_1 = x_4 - x_5$ với $x_4, x_5 \geq 0$, đổi dấu hai vế bất đẳng thức đầu và thay bất đẳng thức cuối bằng hai bất đẳng thức $\geq$, ta đi đến bài toán:

$$f(X) = -x_2 + 2x_4 - 2x_5 \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq 2 \\ -2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 \geq 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \geq 4 \\ -x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq -4 \\ x_j \geq 0, j = \overline{2, 5} \end{cases}$$

3. THUẬT TOÁN ĐỒ THỊ GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH HAI BIẾN

3.1. Nhận xét

Trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ với hệ trục tọa độ vuông góc xOy ta có:

* Phương trình $ax + by = c$, biểu diễn một đường thẳng vuông góc với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a, b)$.

* Các điểm (x, y) thỏa mãn $ax + by \leq c$ nằm trên nửa mặt phẳng giới hạn bởi đường thẳng $ax + by = c$.

* Phương trình $ax + by = f$, khi f thay đổi sẽ cho ta họ đường thẳng song song với vectơ chỉ phương $\vec{v}(-b, a)$. Giá trị f càng lớn khi dịch chuyển các đường của họ theo hướng $\vec{n}(a, b)$.

Vì vậy hình ảnh hình học của bài toán QHTT trong $\mathbb{R}^2$ được mô tả theo thuật toán đồ thị như sau.

3.2. Thuật toán đồ thị giải bài toán quy hoạch tuyến tính

Xét bài toán QHTT với hai biến số

$$\min(\max)\{f(X) = c_1x + c_2y: X = (x, y) \in \Omega\},$$

trong đó Ω là tập phương án của bài toán.

Bước 1. Biểu diễn các điều kiện buộc của lên mặt phẳng tọa độ vuông góc xOy.

Tìm tập phương án Ω .

Bước 2. Biểu diễn phương của hàm mục tiêu $c_1x + c_2y = f$, bằng cách cho f một giá trị f_0 nào đó. Đường thẳng $c_1x + c_2y = f_0$ được gọi là *đường mức*.

Bước 3. Tịnh tiến song song đường mức trên tập phương án để tìm phương án tối ưu.

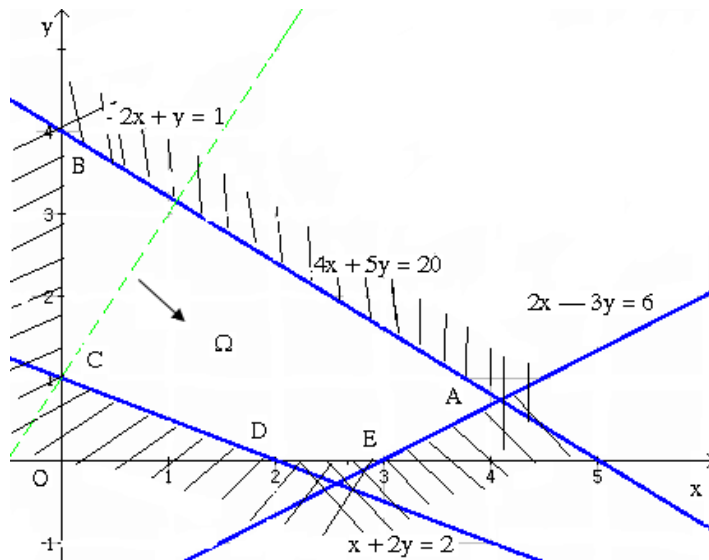
Chú ý: Thay vì xác định vectơ $\vec{n}(c_1, c_2)$ để tìm hướng tăng, ta có thể kiểm tra giá trị hàm mục tiêu ở gốc tọa độ $O(0, 0)$.

Ví dụ 1.2: Giải bài toán QHTT

$$\min\{f(X) = -2x + y\}$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} x + 2y \geq 2 \\ 2x - 3y \leq 6 \\ 4x + 5y \leq 20 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Giải:



Hình 1.1

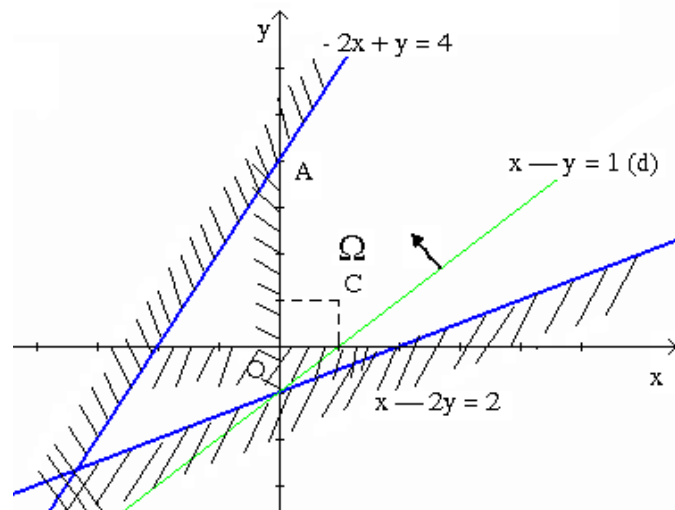
Biểu diễn điều kiện buộc của bài toán lên mặt phẳng tọa độ xOy ta được tập phương án Ω là hình ngũ giác ABCDE (Hình 1.1).

Chọn $f_0 = 1$, ta có đường mức $-2x + y = 1$ (d). Chọn $D(2, 0) \Rightarrow f(D) = -4 < f_0$. Suy ra dịch chuyển đường mức (d) theo chiều mũi tên thì giá trị của hàm là giảm. Do đó tịnh tiến (d) theo chiều mũi tên, ta có PATU' là $A(\frac{45}{11}, \frac{11}{8})$ và $f_{\min} = -\frac{599}{88}$.

Ví dụ 1.3: Giải bài toán QHTT

$$\begin{aligned} &\min \{f(X) = x - y\} \\ &\text{với điều kiện } \begin{cases} -2x + y \leq 4 \\ x - 2y \leq 2 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Giải:



Hình 1.2

Biểu diễn các điều kiện buộc của bài toán lên mặt phẳng xOy ta được tập phương án Ω (Hình 1.2).

Chọn $f_0 = 1$, ta có đường mức (d): $x - y = 1$. Chọn $C(1, 1)$ suy ra $f(C) = 0 < f_0 = 1$. Vì vậy dịch chuyển (d) theo chiều mũi tên thì giá trị của hàm mục tiêu $f(X)$ giảm.

Ta thấy $f(X)$ không bị chặn trên tập phương án nên bài toán không có phương án tối ưu.

Bạn đọc có thể kiểm tra thêm với ví dụ 2, nhưng chỉ xét với hàm mục tiêu $f(X) = -2x + y$ và $\max(-2x + y)$ thì phương án tối ưu lúc này là điểm $A(4, 0)$, $f(A) = 4$.

Cũng cách làm như vậy với ví dụ 2, nhưng thêm điều kiện $x - 2y \geq 5$ thì tập phương án rỗng. Bài toán không có phương án tối ưu.

Ở ví dụ 1, nếu thay $f(X) = 2x - 3y$ thì bài toán có vô số phương án tối ưu.

Nhận xét: i) Tập PA của bài toán QHTT là một miền lồi bị chặn hoặc không bị chặn.

ii) Bài toán có thể có PATU là một đỉnh hoặc có vô số PATU.

iii) Bài toán có thể không có PATU nếu hàm mục tiêu không bị chặn trên tập PA hoặc tập PA rỗng.

4. MỘT SỐ YẾU TỐ HÌNH HỌC TRONG KHÔNG GIAN $\mathbb{R}^n$

4.1. Tập hợp lồi

4.1.1. Tổ hợp lồi. Cho hệ hữu hạn điểm $X_1, X_2, \dots, X_k$ của không gian vectơ $\mathbb{R}^n$.

Điểm $X = \sum_{i=1}^k \lambda_i X_i$ trong đó $\lambda_i \geq 0$ ($i = \overline{1, k}$), $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ được gọi là *tổ hợp lồi*

của hệ điểm đã cho.

4.1.2. Đoạn thẳng. Cho $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$. Tập hợp các điểm là tổ hợp lồi của hai điểm đã cho gọi là đoạn thẳng nối hai điểm ấy.

Tập hợp $\overline{X_1 X_2} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2; 0 \leq \lambda \leq 1\}$ gọi là *đoạn thẳng* nối hai điểm X_1, X_2 .

4.1.3. Tập hợp lồi. Tập $M \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập hợp lồi* nếu mọi đoạn thẳng nối hai điểm của tập hợp thì nằm trọn trong tập hợp đó.

Nghĩa là: Với mọi $X_1, X_2 \in M$, $X = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2; 0 \leq \lambda \leq 1$ thì $X \in M$.

4.1.4. Điểm cực biên (Đỉnh). Điểm X thuộc tập lồi M được gọi là *điểm cực biên* nếu X không thể biểu diễn thành tổ hợp lồi thực sự của hai điểm khác nhau thuộc M . Nghĩa là không tồn tại $X_1, X_2 \in M$ ($X_1 \neq X_2$) sao cho:

$$X = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2; 0 < \lambda < 1.$$

4.1.5. Siêu phẳng. Cho $t \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, Khi đó tập hợp các điểm $X \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn điều kiện $\langle T, X \rangle = \alpha$ gọi là siêu phẳng thuộc không gian $\mathbb{R}^n$.

Tập $\{X \in \mathbb{R}^n : \langle T, X \rangle \leq \alpha\}$ gọi là nửa không gian đóng giới hạn bởi siêu phẳng $\langle T, X \rangle = \alpha$.

4.2. Tính chất của tập hợp lồi

4.2.1. Giao của các tập lồi là tập lồi

4.2.2. Cho D_1 và D_2 là các tập lồi. Khi đó hiệu $D = D_1 - D_2$ và tổng $D = D_1 + D_2$ là các tập hợp lồi (hiệu và tổng theo nghĩa hiệu và tổng các véc tơ tương ứng thuộc tập hợp).

4.2.3. Tập M lồi khi và chỉ khi tổ hợp lồi của hữu hạn điểm thuộc M cũng thuộc M .

4.2.4. Tập $M = \left\{ X \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m \right\}$ là tập lồi.

Trong trường hợp này, tập M được gọi là *tập lồi đa diện* thuộc không gian $\mathbb{R}^n$. Như vậy, *tập lồi đa diện là giao của hữu hạn các nửa không gian đóng*.

4.2.5. Đa diện lồi M có hữu hạn điểm cực biên $X_1, X_2, \dots, X_r$ và mọi điểm thuộc đa diện lồi là tổ hợp lồi của các điểm cực biên, nghĩa là mọi $X \in M$ thì

$$X = \sum_{i=1}^r \lambda_i X_i, \forall \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1.$$

5. TÍNH CHẤT CỦA BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

5.1. Các giả thiết ban đầu

Không mất tính tổng quát, ta giả thiết:

Xét bài toán dạng chính tắc

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j \rightarrow \min \quad (1.6)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (1.7)$$

$$(1.8)$$

* Hệ phương trình (1.7) có đúng m phương trình độc lập tuyến tính.

* $\forall b_i \geq 0, i = \overline{1, m}$.

* $m < n$ (vì trong trường hợp $m \geq n$ thì tập phương án có nhiều nhất một điểm, do vậy việc xét phương án tối ưu là tầm thường).

Ký hiệu: Ω là tập các phương án của bài toán (1.6) – (1.8).

Với bài toán đã cho, để tiện cho việc chứng minh sau này chúng ta nhớ rằng:

Phương án X^* là phương án tối ưu khi và chỉ khi $f(X^*) \leq f(X), \forall X \in \Omega$.

5.2. Các tính chất cơ bản của bài toán quy hoạch tuyến tính

Định lý 1.1. Tập phương án của bài toán QHTT là tập lồi đa diện.

Định nghĩa 1.6

- Điểm cực biên của tập lồi các phương án gọi là *phương án cực biên* (PACB).
- Tập lồi đa diện M được gọi là *bị chặn* nếu với mọi $X = (x_j) \in M$, tồn tại số thực L sao cho $|x_j| \leq L, j = \overline{1, n}$.
- Tập lồi đa diện khác rỗng và bị chặn được gọi là *đa diện lồi*.

Định lý 1.2. Phương án $X \in \Omega$ của bài toán QHTT tổng quát là phương án cực biên khi và chỉ khi X thỏa mãn chặt n ràng buộc độc lập tuyến tính.

Phương án cực biên thỏa mãn chặt đúng n ràng buộc gọi là *phương án cực biên không suy biến*.

Phương án cực biên thỏa mãn chặt hơn n ràng buộc gọi là *phương án cực biên suy biến*.

Chú ý: i) Số n trong định nghĩa là số biến số của bài toán.

ii) Nếu phương án X thỏa mãn ít hơn n ràng buộc chặt (hoặc nếu nó thỏa mãn không ít hơn n ràng buộc chặt nhưng không có hệ n ràng buộc nào độc lập tuyến tính) thì phương án X không phải là phương án cực biên (hay gọi là phương án không cực biên).

Định nghĩa 1.7. Nếu một phương án của một bài toán QHTT vừa là PACB, vừa là PATU thì phương án đó được gọi là *phương án cực biên tối ưu*.

Ví dụ 1.4: Cho bài toán QHTT

$$\begin{aligned} f(X) &= 8x_1 + 2x_2 + 9x_3 - x_4 \rightarrow \min \\ \text{với điều kiện} \quad &\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 - x_4 \geq 14 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_4 = 8 \\ -x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 \leq -7 \\ x_1 \geq 0; x_2 \leq 0; x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Xét xem vectơ $X_0(0, -1, 6, -2)$ và $X_1(4, 0, 0, -2)$, vectơ nào là phương án cực biên của bài toán?

Giải: ▪ Xét $X_0(0, -1, 6, -2)$

+ Thay X_0 vào hệ ràng buộc của bài toán ta thấy thỏa mãn, do đó X_0 là một phương án của bài toán.

+ Mặt khác X_0 thỏa mãn 4 ràng buộc chặt là

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 - x_4 = 14 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_4 = 8 \\ -x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = -7 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Số ràng buộc chặt đúng bằng số biến của bài toán và định thức của ma trận các hệ số ứng với hệ 4 ràng buộc chặt là:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 & -2 \\ -1 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Suy ra hệ 4 ràng buộc chặt là hệ ràng buộc chặt phụ thuộc tuyến tính, do đó phương án X_0 không phải là phương án cực biên.

▪ Xét $X_1(4, 0, 0, -2)$

- Thay X_1 vào hệ ràng buộc của bài toán ta được

$$\begin{cases} 3x_1 & + 2x_3 - x_4 = 14 \\ 3x_1 - 4x_2 & - 2x_4 = 8 \\ -x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 & = -10 < -7 \\ x_1 & = 4 > 0 \\ & x_2 = 0 \\ & & x_3 = 0 \end{cases}$$

Như vậy X_1 là phương án của bài toán. Phương án X_1 làm thỏa mãn 4 ràng buộc chặt. Số ràng buộc bằng số biến của bài toán và định thức của ma trận các hệ số ứng với hệ 4 ràng buộc chặt trên là:

$$B = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Suy ra hệ 4 ràng buộc chặt là hệ ràng buộc chặt độc lập tuyến tính. Do đó phương án X_1 là phương án cực biên.

Định lý 1.3. Nếu tập phương án của bài toán QHTT tổng quát khác rỗng và bị chặn thì nó là đa diện lồi.

Định lý 1.4. Nếu tập phương án của bài toán QHTT là đa diện lồi thì tồn tại phương án cực biên tối ưu.

Chứng minh: Theo giả thiết Ω là đa diện lồi, suy ra tồn tại hữu hạn các phương án cực biên (điểm cực biên) $X_1, X_2, \dots, X_r$ và với mọi X thuộc Ω ta có:

$$X = \sum_{i=1}^r \lambda_i X_i, \forall \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1.$$

Đặt $f(X^*) = \min \{f(X_1), f(X_2), \dots, f(X_r)\}$, ta có:

$$f(X) = f\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^r \lambda_i f(X_i) \geq \sum_{i=1}^r \lambda_i f(X^*) = f(X^*) \sum_{i=1}^r \lambda_i = f(X^*).$$

Suy ra $f(X) \geq f(X^*)$, $\forall X \in \Omega$. Vậy X^* là phương án cực biên tối ưu. ■

Định lý 1.5. Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính có phương án tối ưu thì có ít nhất một phương án cực biên tối ưu.

Nhận xét: Từ định lý 1.4 và 1.5 cho phép chúng ta tìm phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính trên tập các phương án cực biên. Sau này, chúng ta thấy thêm rằng số phương án cực biên là hữu hạn.

Định lý 1.6. Phương án $X(x_j)$ là cực biên khi và chỉ khi hệ véc tơ cột $\{A_j\}$ ứng với các $x_j > 0$ độc lập tuyến tính.

Chứng minh: Không mất tính tổng quát, giả sử X có dạng $X = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$, trong đó $x_1, x_2, \dots, x_k > 0$.

Điều kiện cần: Giả sử X là phương án cực biên. Ta chứng minh hệ véc tơ $A_1, A_2, \dots, A_k$ độc lập tuyến tính.

Thật vậy, giả sử ngược lại hệ $A_1, A_2, \dots, A_k$ phụ thuộc tuyến tính, nghĩa là tồn tại $\lambda_s \neq 0$ ($s \in [1, k]$) mà

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k = 0. \quad (1.12)$$

Lại do X là phương án nên

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_k A_k = B. \quad (1.13)$$

Từ (1.12) và (1.13) ta có

$$(x_1 \pm \theta \lambda_1) A_1 + (x_2 \pm \theta \lambda_2) A_2 + \dots + (x_k \pm \theta \lambda_k) A_k = B.$$

Vì $x_1, x_2, \dots, x_k > 0$, nên có thể chọn $\theta > 0$ đủ bé để $x_s \pm \theta \lambda_s \geq 0$, $s = 1, 2, \dots, k$. Khi đó ta được:

$$X_1 = (x_1 + \theta \lambda_1, x_2 + \theta \lambda_2, \dots, x_k + \theta \lambda_k, 0, \dots, 0)$$

và
$$X_2 = (x_1 - \theta \lambda_1, x_2 - \theta \lambda_2, \dots, x_k - \theta \lambda_k, 0, \dots, 0)$$

là hai phương án khác nhau (vì tồn tại $\lambda_s \neq 0$, $\theta > 0$).

Nhưng lúc này $X = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$, suy ra X là tổ hợp lồi của hai phương án.

Điều này là mâu thuẫn với X là phương án cực biên.

Vậy hệ véc tơ cột $A_1, A_2, \dots, A_k$ độc lập tuyến tính.

Điều kiện đủ: Cho hệ vectơ cột $A_1, A_2, \dots, A_k$ của ma trận ràng buộc A trong sự phân tích $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_k A_k = B$, (với $x_1, x_2, \dots, x_k > 0$) độc lập tuyến tính.

Ta chứng minh $X = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ là phương án cực biên.

Giả sử X không phải là phương án cực biên, nghĩa là tồn tại hai phương án khác nhau $X' = (x'_j) = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ và $X'' = (x''_j) = (x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$ của bài toán sao cho $X = \lambda X' + (1 - \lambda)X''$, $\lambda \in (0, 1)$. Điều này tương đương với

$$x_j = \lambda x'_j + (1 - \lambda)x''_j, \forall j = \overline{1, n}.$$

Với $j = \overline{k+1, n}$ thì một mặt $x_j = 0, \forall j = \overline{k+1, n}$, mặt khác

$$x_j = \lambda x'_j + (1 - \lambda)x''_j, \forall j = \overline{k+1, n},$$

mà X', X'' là các phương án của bài toán nên $x'_j \geq 0, x''_j \geq 0, \forall j = \overline{k+1, n}$. Suy ra $x'_j = x''_j \geq 0, \forall j = \overline{k+1, n}$. Tức là X' và X'' thỏa mãn

$$x'_1 A_1 + x'_2 A_2 + \dots + x'_k A_k = B$$

$$x''_1 A_1 + x''_2 A_2 + \dots + x''_k A_k = B$$

Từ đó, ta có $(x'_1 - x''_1)A_1 + (x'_2 - x''_2)A_2 + \dots + (x'_k - x''_k)A_k = 0$.

Vì X' và X'' là hai phương án khác nhau nên tồn tại $x'_1 - x''_1 \neq 0$, từ đẳng thức trên suy ra hệ vectơ $A_1, A_2, \dots, A_k$ phụ thuộc tuyến tính. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy X là phương án cực biên. ■

Ví dụ 1.5: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$f(X) = x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 9x_4 - 3x_5 = 7 \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1, 5} \end{cases}$$

Hỏi vectơ $X(4, 5, 0, 0, 0)$ có phải là phương án cực biên của bài toán đã cho hay không?

Giải: Thay X vào hệ ràng buộc ta thấy thỏa mãn nên X là phương án của bài toán.

Phương án X có hai thành phần dương là x_1, x_2 . Hệ vectơ cột của ma trận ràng buộc A ứng với các thành phần tọa độ dương của X là:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Xét ma trận

$$D = [A_1, A_2] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2h_1+h_2 \\ 3h_1+h_3}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-4/3h_2+h_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $\text{rank} D = 2 =$ số vectơ của hệ, do đó hệ vectơ $\{A_1, A_2\}$ độc lập tuyến tính. Theo định lý 1.6, phương án X là phương án cực biên của bài toán.

Ví dụ 1.6: Cũng với bài toán như trên, hỏi vectơ $X(2, 8, 0, 1, 0)$ có phải là phương án cực biên hay không?

Giải: Dễ thấy X là một phương án của bài toán.

Phương án X có 3 thành phần tọa độ dương là x_1, x_2, x_4 . Hệ vectơ cột của ma trận ràng buộc A ứng với thành phần tọa độ dương của phương án X là $\{A_1, A_2, A_4\}$, hệ này có số vectơ bằng số chiều và định thức của ma trận tạo bởi chúng là:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Suy ra hệ vectơ $\{A_1, A_2, A_4\}$ phụ thuộc tuyến tính. Vậy X không phải là phương án cực biên.

Hệ quả 1. Số tọa độ dương của phương án cực biên có tối đa là m (m là số phương trình của hệ ràng buộc).

Hệ quả 2. Số phương án cực biên của Ω là hữu hạn.

Chú ý: i) Một phương án của bài toán (1.6) – (1.8) có số thành phần tọa độ dương không vượt quá m chưa hẳn là phương án cực biên.

ii) Một phương án cực biên có đủ m tọa độ dương thì phương án cực biên đó là phương án cực biên không suy biến.

iii) Một phương án cực biên của bài toán trên có số thành phần tọa độ dương ít hơn m thì phương án cực biên đó là phương án cực suy biến.

iv) Hệ m vectơ $\{A_j\}$ độc lập tuyến tính tương ứng với phương án cực biên X như đã nêu trong định lý 1.6 gọi là *cơ sở liên kết*.

v) Bài toán QHTT có tất cả các phương án cực biên không suy biến được gọi là *bài toán QHTT không suy biến*.

Ví dụ 1.7: Cho bài toán

$$\begin{aligned} f(X) &= 2x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min \\ \text{với điều kiện } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 &- x_5 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases} \end{aligned}$$

a) Vectơ $X(2, 0, 0, 0, 1)$ có phải là phương án cực biên không?

b) Hệ vectơ $\{A_1, A_2, A_3\}$ có độc lập tuyến tính không? Nếu có hãy tìm một phương án cực biên tương ứng.

Giải: a) Vì hệ vectơ $\{A_1, A_4, A_5\}$ độc lập tuyến tính, nên $X(2, 0, 0, 0, 1)$ là phương án cực biên.

b) Để kiểm tra hệ vectơ $\{A_1, A_2, A_3\}$ độc lập tuyến tính.

Giả sử $X^*(x_1, x_2, x_3, 0, 0)$ ($x_1, x_2, x_3 \geq 0$) là phương án cực biên cần tìm. Khi đó X^* thỏa mãn các điều kiện ràng buộc của bài toán.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{16}{9} \\ x_2 = \frac{1}{3} \\ x_3 = -\frac{1}{9} < 0 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases} \Rightarrow \text{Hệ vô nghiệm.}$$

Vậy không tồn tại phương án cực biên nào nhận hệ vectơ $\{A_1, A_2, A_3\}$ là cơ sở liên kết.

Định lý 1.7. *Mỗi phương án cực biên của tập phương án Ω đều tồn tại một hàm mục tiêu để nó là phương án tối ưu duy nhất.*

Chứng minh: Cho $X(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ là phương án cực biên ứng với cơ sở liên kết $A_1 A_2 \dots A_k$ ($k \in [1, m]$).

Đặt: $J = [1, k]$ là tập chỉ số cơ sở liên kết của X .

$$C = (c_j) \text{ với } c_j = \begin{cases} 0 & \text{nếu } j \in J \\ 1 & \text{nếu } j \notin J \end{cases}, \text{ tức là } C = \begin{pmatrix} 0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1 \\ \text{cả } k \text{ số } 0 \end{pmatrix}.$$

Rõ ràng $CX = 0$, và với mọi phương án $Y(y_j)$ ta có $CY = \sum_{j=k+1}^n y_j \geq 0$. Vậy X

là phương án tối ưu. Đồng thời nếu có $Y(y_j)$ là phương án tối ưu thì cũng có $CY = 0$.

Lại vì, $c_j = 1$ với $j \notin J$, chứng tỏ $y_j = 0$ với $j \notin J$. Do $[A_1 A_2 \dots A_k]$ không suy biến nên từ hệ phương trình $AX = B$ và $AY = B$ suy ra $X = Y$, nghĩa là phương án X tối ưu duy nhất.

Định lý 1.8. (Về sự tồn tại PATU của bài toán QHTT)

Nếu bài toán QHTT có tập phương án khác rỗng và hàm mục tiêu bị chặn dưới đối với bài toán $f(X) \rightarrow \min$ (bị chặn trên đối với bài toán $f(X) \rightarrow \max$) trong tập các phương án thì bài toán có phương án tối ưu.

Ví dụ 1.9: Chứng minh bài toán sau có phương án tối ưu

$$f(X) = -3x_1 - 3x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 + 5x_3 \leq 16 \\ -2x_2 + 9x_3 \geq -3 \\ -3x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1, 3} \end{cases}$$

Giải: ▪ Nhận thấy $X(0, 0, 2)$ là một phương án của bài toán, do đó tập phương án của bài toán là khác rỗng.

- Chứng tỏ hàm mục tiêu $f(X)$ bị chặn dưới.

Từ hệ ràng buộc ta có

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ -x_1 - 5x_3 \geq -16 \\ -3x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6 \end{cases} \Rightarrow -3x_1 - 3x_2 - x_3 \geq -9$$

Vì $x_j \geq 0, \forall j = \overline{1, 3}$ nên $x_3 \geq -x_3$. Do đó

$$f(X) = -3x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -3x_1 - 3x_2 - x_3 \geq -9, \forall X \in \Omega.$$

Tức là hàm mục tiêu $f(X)$ bị chặn dưới trong tập phương án Ω . Theo định lý 1.8 thì bài toán có phương án tối ưu.

Ví dụ 1.9: Cho bài toán QHTT

$$f(X) = 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 5 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 \leq 8 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 7 \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1, 4} \end{cases}$$

Chứng minh rằng bài toán có phương án nhưng không có phương án tối ưu.

Giải: Xét họ vectơ phụ thuộc tham số $X(\beta) = (0, 2\beta, 0, \beta)$, mọi β tùy ý. Thay $X(\beta)$ vào hệ ràng buộc của bài toán, ta được:

$$\begin{cases} 2 \times 0 - 2 \times (2\beta) + 0 - \beta = -5\beta \leq 5 \\ 3 \times 0 + 2\beta + 3 \times 0 - 4\beta = -2\beta \leq 8 \\ 0 - 2 \times (2\beta) + 0 + 3\beta = -\beta \leq 7 \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1, 4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta \geq -1 \\ \beta \geq -4 \\ \beta \geq -7 \\ \beta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \beta \geq 0.$$

Vậy, với mọi $\beta \geq 0$ thì $X(\beta)$ là phương án của bài toán.

Mặt khác, thay họ $X(\beta)$ vào hàm mục tiêu ta được

$$f(X(\beta)) = -\beta \rightarrow -\infty \text{ khi } \beta \rightarrow +\infty.$$

Vậy hàm mục tiêu của bài toán không bị chặn dưới trong tập phương án, do đó bài toán không có phương án tối ưu.

Định lý 1.9. Nếu bài toán QHTT có hai phương án tối ưu khác nhau thì có vô số phương án tối ưu.

Chứng minh: Giả sử X_1 và X_2 là hai phương án tối ưu khác nhau của bài toán (1.6)

– (1.8), tức là $f(X_1) = f(X_2) \leq f(X), \forall X \in \Omega$.

Khi đó, xét $Y = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2, \lambda \in (0, 1)$.

Rõ ràng Y là một phương án và

$$f(Y) = \lambda f(X_1) + (1 - \lambda)f(X_2) = f(X_1) = f(X_2) \leq f(X), \forall X \in \Omega.$$

Vậy Y là phương án tối ưu của bài toán (1.6) – (1.8), có vô số Y như vậy. ■

6. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

Nội dung của phương pháp: Trên cơ sở các tính chất đã nêu ở trên, để tìm phương án tối ưu của bài toán QHTT dạng chính tắc ta có thể duyệt các phương án cực biên bằng cách: xuất phát từ phương án cực biên X_0 nào đó, kiểm tra X_0 có tối ưu không?

Nếu X_0 tối ưu thì dừng.

Nếu chưa tối ưu thì tìm cách chuyển sang một phương án cực biên mới tốt hơn (theo nghĩa giá trị của hàm mục tiêu giảm).

Quá trình tiếp tục như vậy, ta được dãy các phương án cực biên tốt dần. Vì số phương án cực biên là hữu hạn cho nên sau một số hữu hạn bước ta sẽ tìm được phương án cực biên tối ưu nhất hoặc xác định bài toán không có lời giải.

6.1. Cơ sở lý luận của phương pháp đơn hình

Xét bài toán QHTT dạng chính tắc

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j = CX \rightarrow \min \quad (1.6)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} AX = B \\ X \geq O \end{cases} \quad (1.7)$$

$$(1.8)$$

Như ở mục 5 chương 1, ta giả thiết:

* Hệ phương trình (1.7) có đúng m phương trình độc lập tuyến tính (rank $A = m$);

* $\forall b_i \geq 0, i = \overline{1, m}$;

* $m < n$.

Bây giờ ta giả thiết thêm rằng:

- Bài toán (1.6) – (1.8) không suy biến;
- Biết trước một phương án cực biên xuất phát X_0 .

Ở phần sau sẽ nêu cách giải quyết những bài toán chưa có được giả thiết này.

Không mất tính tổng quát, giả sử phương án cực biên X_0 có dạng:

$$X_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}, 0, \dots, 0),$$

trong đó $x_{j0} > 0, \forall j = 1, 2, \dots, m$.

Với cơ sở liên kết là $A_1 A_2 \dots A_m$. Vì X_0 là phương án nên nó phải thỏa mãn ràng buộc (1.7), ta có

$$x_{10}A_1 + x_{20}A_2 + \dots + x_{m0}A_m = B, \quad (1.14)$$

và giá trị của hàm mục tiêu tại X_0 là

$$f(X_0) = \sum_{j=1}^n c_j x_{j0} = c_1 x_{10} + c_2 x_{20} + \dots + c_m x_{m0}. \quad (1.15)$$

Do $A_1, A_2, \dots, A_m$ là cơ sở của không gian $\mathbb{R}^m$ nên các vectơ A_j ($j = \overline{1, n}$) biểu thị qua duy nhất qua chúng:

$$A_j = \sum_{i=1}^m x_{ij} A_i = x_{1j} A_1 + x_{2j} A_2 + \dots + x_{mj} A_m \quad (j = \overline{1, n}). \quad (1.16)$$

Đặt $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})$ là tọa độ của A_j ($j = \overline{1, n}$) đối với cơ sở $A_1, A_2, \dots, A_m$.

Chú ý: Nếu $j = 1, 2, \dots, m$ thì $X_j = (0, 0, \dots, 0, \underset{\text{vị trí } j}{1}, 0, \dots, 0)$ là vectơ đơn vị thứ j .

Nếu bằng cách nào đó biết được X_0 là PATU' thì mục đích của ta đã đạt được. Nếu X_0 không phải là PATU' thì ta tìm cách xây dựng một phương án cực biên mới mà tại đó giá trị của hàm mục tiêu nhỏ hơn $f(X_0)$.

Muốn vậy chúng ta cần xác định một cơ sở mới, bằng cách thay thế một vectơ trong cơ sở cũ bởi một vectơ nào đó nằm ngoài cơ sở cũ.

Không mất tính tổng quát giả sử đưa A_j ($j = \overline{m+1, n}$) vào cơ sở mới (A_j có dạng (1.16)). Từ (1.14) và (1.15), ta có

$$(x_{10} - \theta x_{1j})A_1 + (x_{20} - \theta x_{2j})A_2 + \dots + (x_{m0} - \theta x_{mj})A_m + \theta A_j = B, \quad (1.17)$$

trong đó θ là một số dương tùy ý.

Vì $x_{i0} > 0$, ($\forall i = \overline{1, m}$), nên có thể tìm được số θ đủ bé sao cho

$$(x_{i0} - \theta x_{ij}) > 0, \quad (\forall i = \overline{1, m}). \quad (1.18)$$

Khi đó rõ ràng vectơ

$$X^*(x^*_j) = (x_{10} - \theta x_{1j}, x_{20} - \theta x_{2j}, \dots, x_{m0} - \theta x_{mj}, \underset{\text{v? trí th? j}}{\theta}, 0, \dots, 0), \quad (j = \overline{m+1, n})$$

là một phương án của bài toán (1.6) – (1.8), và tại đó giá trị của hàm mục tiêu sẽ là

$$\begin{aligned} f(X^*) &= \sum_{j=1}^n c_j x^*_j = \sum_{i=1}^m c_i (x_{i0} - \theta x_{ij}) + c_j \theta = \\ &= \sum_{i=1}^m c_i x_{i0} - \theta \left(\sum_{i=1}^m c_i x_{ij} - c_j \right). \end{aligned}$$

$$\text{Đặt} \quad \Delta_j = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij} - c_j, \quad (1.19)$$

gọi là *ước lượng* của vectơ A_j ứng với phương án cực biên X_0 .

$$\text{Suy ra} \quad f(X^*) = f(X_0) - \theta \Delta_j. \quad (1.20)$$

Chú ý: $\Delta_j = 0$, $\forall j$ là chỉ số của hệ vectơ trong cơ sở cũ.

Định lý 1.10. (Dấu hiệu tối ưu)

Nếu $X_o = (x_{1o}, x_{2o}, \dots, x_{mo}, 0, \dots, 0)$ là một phương án cực biên sao cho $\Delta_j \leq 0, \forall j = \overline{1, n}$ thì X_o là phương án tối ưu của bài toán (1.6) – (1.8).

Chứng minh: Giả sử $Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ là một phương án bất kỳ, ta cần chứng minh $f(X_o) \leq f(Y)$.

Do Y là một phương án nên thỏa mãn ràng buộc (1.7)

$$y_1 A_1 + y_2 A_2 + \dots + y_m A_m = B, \quad (1.21)$$

và giá trị của hàm mục tiêu tại Y là

$$f(Y) = \sum_{j=1}^n c_j y_j = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n. \quad (1.22)$$

Vì $\Delta_j \leq 0, \forall j = \overline{1, n} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m c_i x_{ij} \leq c_j, \forall j = \overline{1, n}$ và $y_j \geq 0, \forall j = \overline{1, n}$ nên từ (1.22) ta có

$$f(Y) \geq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m c_i x_{ij} \right) y_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n y_j x_{ij} \right) c_i. \quad (1.23)$$

Mặt khác, trong (1.21) thay A_j bởi (1.16) ta được

$$B = \sum_{j=1}^n y_j A_j = \sum_{j=1}^n y_j \left(\sum_{i=1}^m x_{ij} A_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n y_j x_{ij} \right) A_i. \quad (1.24)$$

Mà X_o là phương án nên cũng có

$$B = x_{1o} A_1 + x_{2o} A_2 + \dots + x_{mo} A_m = \sum_{i=1}^m x_{io} A_i. \quad (1.25)$$

So sánh (1.24) và (1.25) ta có

$$x_{io} = \sum_{j=1}^n y_j x_{ij}, \quad \forall i = \overline{1, m}. \quad (1.26)$$

Từ (1.23) và (1.25) suy ra $f(Y) \geq f(X_o)$. ■

Định lý 1.11. (Dấu hiệu bài toán không có lời giải)

Nếu tồn tại một vectơ A_j ngoài cơ sở liên kết của phương án cực biên $X_o = (x_{1o}, x_{2o}, \dots, x_{mo}, 0, \dots, 0)$ sao cho $\Delta_j > 0$ và $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}) \leq 0$ thì bài toán

(1.6) – (1.8) không có phương án tối ưu, cụ thể là hàm mục tiêu có thể lấy giá trị nhỏ tùy ý trên tập phương án.

Chứng minh: Do $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}) \leq 0 \Rightarrow x_{ij} \leq 0, \forall i = \overline{1, m}$ nên với θ là số dương nhỏ tùy ý thì từ (1.18), suy ra X^* là phương án có $m + 1$ thành phần tọa độ dương.

Mặt khác, theo (1.20) thì $f(X^*) = f(X_0) - \theta \Delta_j$. Do $\Delta_j > 0, \theta > 0$ nên $f(X^*) < f(X_0)$, tức là phương án X^* tốt hơn X_0 .

Hơn nữa, $f(X^*)$ có thể lấy giá trị nhỏ tùy ý nếu θ được chọn là số dương lớn tùy ý, tức là hàm mục tiêu không bị chặn dưới. Suy ra bài toán không có phương án tối ưu. ■

Định lý 1.12. (Cải tiến phương án hiện có)

Nếu tại phương án cực biên X_0 , tồn tại $\Delta_k > 0$ và tồn tại $x_{ik} > 0$ thì xây dựng được phương án cực biên X_1 tốt hơn X_0 , nghĩa là $f(X_1) \leq f(X_0)$.

Chứng minh: Theo giả thiết X_0 là phương án nên

$$x_{10}A_1 + x_{20}A_2 + \dots + x_{m0}A_m = B. \quad (1.27)$$

Mặt khác, A_k được biểu diễn qua cơ sở $A_1, A_2, \dots, A_m$ liên kết của X_0 là

$$A_k = x_{1k}A_1 + x_{2k}A_2 + \dots + x_{mk}A_m. \quad (1.28)$$

Từ (1.27) và (1.28) ta được

$$(x_{10} - \theta x_{1k})A_1 + (x_{20} - \theta x_{2k})A_2 + \dots + (x_{m0} - \theta x_{mk})A_m + \theta A_k = B,$$

trong đó θ là một số dương tùy ý.

Khi đó để vector

$$X^* = (x_{10} - \theta x_{1k}, x_{20} - \theta x_{2k}, \dots, x_{m0} - \theta x_{mk}, \underset{\text{vị trí } \theta}{\theta}, 0, \dots, 0),$$

là phương án thì ta cần và $x_{i0} - \theta x_{ik} \geq 0, \forall i = \overline{1, m}$.

Với $\theta > 0$ thì điều đó tương đương với $0 < \theta \leq \frac{x_{i0}}{x_{ik}}, \forall i = \overline{1, m}$.

$$\text{Chọn } \theta_0 = \min \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{ik}} \mid x_{ik} > 0, i = \overline{1, m} \right\} \quad (1.29)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử min đạt được tại chỉ số $i = l$ ($l = 1, 2, \dots, m$), tức là $\theta_o = \frac{x_{lo}}{x_{lk}} > 0$. Khi đó phương án mới

$$X_1 = (x_{1o} - \theta_o x_{1k}, x_{2o} - \theta_o x_{2k}, \dots, x_{(l-1)o} - \theta_o x_{(l-1)k}, x_{(l+1)o} - \theta_o x_{(l+1)k}, \dots, x_{mo} - \theta_o x_{mk}, 0, \dots, 0, \underbrace{\theta_o}_{\text{vị trí } k}, 0, \dots, 0),$$

là phương án có đủ m thành phần tọa độ dương (đó là vị trí thứ $1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, m$ và k), hơn thế nữa $X_1 \neq X_o$ (vì $\theta_o > 0$).

Theo đại số tuyến tính, hệ vectơ $\{A_1, A_2, \dots, A_{l-1}, A_{l+1}, \dots, A_m, A_k\}$ là một cơ sở. Do đó X_1 là phương án cực biên, đồng thời giá trị hàm mục tiêu tại X_1 là

$$f(X_1) = f(X_o) - \theta_o \Delta_k$$

Vì $\theta_o > 0, \Delta_k > 0$ nên $f(X_1) < f(X_o)$, hay X_1 tốt hơn X_o . ■

6.2. Công thức đổi tọa độ và bảng đơn hình

Từ cơ sở lý luận của phương pháp đơn hình đã được trình bày ta thấy rằng xuất phát từ phương án cực biên ban đầu X_o được coi như đã biết, sau khi kiểm tra nếu thấy chưa thỏa mãn định lý 1.10 (dấu hiệu tối ưu) và định lý 1.11 (dấu hiệu bài toán không giải được) thì ta phải tiến hành xây dựng một phương án cực biên mới X_1 tốt hơn X_o và kiểm tra nó. Quá trình đó sau một số hữu hạn bước sẽ kết thúc, lúc đó ta tìm được phương án tối ưu hoặc kết luận bài toán không giải được.

Ta nói rằng đã thực hiện được một *bước lặp* nếu như mỗi phương án xuất hiện trong quá trình nói trên, sau khi đã kiểm tra xong ta có được một quyết định tiếp theo.

Trong mỗi bước lặp ta cần xác định các tham số x_{ij}, Δ_j, f (giá trị hàm mục tiêu tại phương án cực biên đang xét), trong đó việc xác định x_{ij} là khó khăn nhất vì mỗi j ta phải giải một hệ phương trình tuyến tính. Do cơ sở liên kết của phương án cực biên ở mỗi bước lặp chỉ khác bước lặp trước một vectơ nên ta có thể tìm được các công thức truy toán cho phép tìm được giá trị của các tham số ở mỗi bước từ các giá trị ở bước trước.

6.2.1. Công thức đổi tọa độ

Tại phương án cực biên X_0 , ta đã biết

x_{i0} là tọa độ thứ i của X_0

x_{ij} là tọa độ thứ i của véc tơ A_j

Chú ý: Nếu hệ cơ sở $A_1 A_2 \dots A_m$ của X_0 là các véc tơ đơn vị thì $x_{ij} = a_{ij}$ của ma trận A .

Từ đó ta tính được: $\Delta_j = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij} - c_j$

$$f(X_0) = \sum_{i=1}^m c_i x_{i0},$$

để có X_1 ta cần tìm x_{i1} , x'_{ij} , Δ'_j , $f(X_1)$.

Theo chứng minh định lý 1.12, ta có

$$x_{i1} = \begin{cases} \frac{x_{i0}}{x_{lk}} & \text{nếu } i = k \\ x_{i0} - \frac{x_{i0}}{x_{lk}} x_{ik} & \text{nếu } i \neq k \end{cases} \quad (1.30)$$

Ta có hệ $\{A_1, A_2, \dots, A_{l-1}, A_l, A_{l+1}, \dots, A_m\}$ là cơ sở cũ ứng với phương án cực biên X_0 và thay A_l bởi A_k ($k = \overline{m+1, n}$; k ứng với $\Delta_k > 0$), ta được cơ sở mới

$$\{A_1, A_2, \dots, A_{l-1}, A_{l+1}, \dots, A_m, A_k\}$$

Theo (1.28) ta có

$$A_k = \sum_{i=1}^m x_{ik} A_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m x_{ik} A_i + x_{lk} A_l, \quad x_{lk} > 0 \quad (1.31)$$

Với mỗi $j = \overline{1, n}$ véc tơ A_j biểu diễn qua cơ sở cũ và mới là

$$A_j = \sum_{i=1}^m x_{ij} A_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m x_{ij} A_i + x_{lj} A_l \quad (1.32)$$

$$A_j = \sum_{i=1}^m x'_{ij} A_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m x'_{ij} A_i + x'_{lj} A_l \quad (1.33)$$

Từ (1.31) ta có

$$A_l = \frac{1}{X_{lk}} \left(A_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m x_{ik} A_i \right) \quad (1.34)$$

Thay (1.33) vào (1.32) ta được

$$\begin{aligned} A_j &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m x_{ij} A_i + \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \left(A_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m x_{ik} A_i \right) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m \left(x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik} \right) A_i + \frac{x_{lj}}{x_{lk}} A_k \end{aligned} \quad (1.35)$$

Do A_j biểu thị tuyến tính duy nhất qua cơ sở mới nên so sánh (1.33) và (1.35) ta được

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik} & \text{nếu } i \neq k \\ \frac{x_{lj}}{x_{lk}} & \text{nếu } i = k \end{cases} \quad (1.36)$$

Ngoài ra

$$f(X_1) = f(X_0) - \theta_0 \Delta_k. \quad (1.37)$$

Với mọi $j = \overline{1, n}$, ta có

$$\begin{aligned} \Delta'_j &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m c_i x'_{ij} + c_k x'_{kj} - c_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m c_i \left(x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik} \right) + c_k \frac{x_{lj}}{x_{lk}} - c_j \\ &= \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m c_i x_{ij} - c_j \right) - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m c_i x_{ik} - c_k \right) = \left(\sum_{i=1}^m c_i x_{ij} - c_j \right) - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \left(\sum_{i=1}^m c_i x_{ik} - c_k \right). \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \Delta'_j = \Delta_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \Delta_k \quad (1.38)$$

6.2.2. Bảng đơn hình với cơ sở đơn vị có sẵn

Việc biến đổi từ phương án X_0 sang phương án X_1 theo các công thức (1.30) và (1.36) cho thuận tiện ta mô tả nó trên bảng gồm các dòng và các cột, được gọi là

bảng đơn hình như Bảng 1.4.

Bảng 1.4

Cơ sở	Hệ số	Tọa độ	c_1	C_2		c_k	...	c_n
A_i	c_i	X_0	A_1	A_2		A_k	...	A_n
...	...	...	...	...	...	...	...	...
A_l	c_l	x_{l0}	x_{l1}	x_{l2}	...	x_{lk}	...	x_{ln}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$f(X)$			Δ_1	Δ_2	...	Δ_k	...	Δ_n

Để tiện thực hành tính toán, từ các công thức (1.30), (1.36), (1.37) và (1.38) ta nêu thành quy tắc:

* Δ_j bằng tích các phần tử ở cột (c_i) tương ứng với các phần tử ở cột (A_j), rồi cộng lại, được kết quả bao nhiêu trừ phần tử c_j ở trên đầu cột j .

* Các phần tử hàng k ở bảng mới bằng các phần tử hàng l ở bảng cũ chia cho phần tử trực x_{lk} .

* Các phần tử hàng i bảng mới (x'_{ij}), tương ứng bằng hàng k bảng mới nhân với ($-x_{ik}$) rồi cộng với hàng i ở bảng cũ ($i \neq k$).

Để dễ dàng tính toán ta giả thiết các cột của ma trận D lập thành bởi hệ cơ sở $\{A_i\}_{i=1}^m$ liên kết với phương án cực biên X_0 lập thành ma trận đơn vị. Khi đó $x_{ij} = a_{ij}$ và $x_{i0} = b_i$. Do vậy các số liệu của bảng đơn hình đầu tiên lúc này có dạng (bảng đơn hình với cơ sở đơn vị có sẵn):

Bảng 1.5

Cơ sở	Hệ số	Tọa độ	c_1	C_2		c_k	...	c_n
A_i	c_i	X_0	A_1	A_2		A_k	...	A_n
...	...	...	...	...	...	...	...	...
A_l	c_l	b_l	a_{l1}	a_{l2}	...	a_{lk}	...	a_{ln}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$f(X)$			Δ_1	Δ_2	...	Δ_k	...	Δ_n

Chú ý: Dòng l gọi là *dòng xoay*, cột k được gọi là *cột xoay*.

6.2.3. Thuật toán đơn hình với cơ sở đơn vị có sẵn

Bước 1. Chọn cơ sở đơn vị và phương án cực biên xuất phát X_0 (xác định x_{i0} , x_{ij} , $f(X)$ và Δ_j).

Bước 2. Kiểm tra $\Delta_j \leq 0, \forall j = 1, 2, \dots, n$?

Nếu có, chuyển sang bước 7.

Nếu không, chuyển sang bước 3.

Bước 3. Kiểm tra tồn tại $\Delta_j > 0, \forall x_{ij} \leq 0$?

Nếu có, chuyển sang bước 7.

Nếu không, chuyển sang bước 4.

Bước 4. Chọn $\Delta_k = \max \{\Delta_j > 0\}$, đưa A_k vào cơ sở.

Bước 5. Tìm $\theta_0 = \min_{x_{ik} > 0} \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{ik}} \right\} = \frac{x_{l0}}{x_{lk}}$, đưa A_l ra khỏi cơ sở.

Bước 6. Xây dựng X_1 theo công thức (1.37), (1.43) hoặc quy tắc đã nêu.

Gán $X_1 := X_0$, rồi trở lại bước 1.

Bước 7. Dừng lại, trả lời có hay không phương án tối ưu.

Ví dụ 1.10: Giải bài toán QHTT sau

$$f(X) = x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_6 \rightarrow \min$$
$$\text{với điều kiện } \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 - x_6 = 2 \\ x_2 + x_4 + x_6 = 12 \\ 4x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 = 9 \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1, 6} \end{cases}$$

Giải: Chọn cơ sở liên kết $\{A_1, A_2, A_5\}$ là các vectơ đơn vị tương ứng với phương án cực biên xuất phát $X(2, 12, 0, 0, 9, 0)$. Ta có bảng đơn hình (Bảng 1.6).

Bảng 1.6

Bảng số	Cơ sở	Hệ số	Tọa độ	1	-1	2	-2	0	-3
	A_i	c_i	x_{i0}	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
I	$\Leftarrow A_1$	1	2	1	0	1	(1)	0	-1
	A_2	-1	12	0	1	0	1	0	1
	A_5	0	9	0	0	4	2	1	3
	$f(X) = -10$			0	0	-1	$2 \uparrow$	0	1
	A_4	-2	2	1	0	1	1	0	-1
	A_2	-1	10	-1	1	-1	0	0	2
	$\Leftarrow A_5$	0	5	-2	0	2	0	1	(5)
	$f(X) = -14$			-2	0	-3	0	0	$3 \uparrow$
III	A_4	-2	3	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{7}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0
	A_2	-1	8	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{9}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	0
	A_6	-1	1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	1
	$f(X) = -17$			$-\frac{4}{5}$	0	$-\frac{21}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	0

Tại bảng III, ta thấy $\Delta_j \leq 0, \forall j = \overline{1,6}$ nên ta có phương án tối ưu là:

$$X = (0, 8, 0, 3, 0, 1) \text{ và } f_{\min} = -17.$$

6.3. Bài toán suy biến

Nếu bài toán không suy biến thì thuật toán dừng lại sau hữu hạn bước lặp. Trong trường hợp bài toán suy biến, nghĩa là có thể gặp phương án cực biên X_0 mà có thành phần thuộc cơ sở bằng 0, khi đó đại lượng $\theta_0 = \min_{x_{ik} > 0} \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{ik}} \right\}$ có thể bằng 0.

Khi đạt giá trị là 0, ta nhận được phương án cực biên mới giống với phương án cực biên cũ, mặc dù cơ sở mới khác cơ sở cũ. Hai khả năng có thể xảy ra.

Một là sau một số hữu hạn bước sẽ thoát khỏi phương án cực biên X_0 và chuyển sang phương án cực biên mới tốt hơn.

Hai là sau một số hữu hạn bước lại quay trở lại cơ sở mà nó đi qua. Trường hợp này cho ta một vòng khép kín bao gồm một dãy các cơ sở của phương án cực biên X_0 , người ta gọi đây là hiện tượng xoay vòng của thuật toán. Về mặt lý thuyết cần phải có biện pháp để khắc phục trường hợp này. Sau đây là biện pháp mà người ta gọi là quy tắc từ vựng để khắc phục hiện tượng xoay vòng trên, đảm bảo tính hữu hạn của thuật toán.

Nội dung của quy tắc đó là: Giả sử tại phương án cực biên X_0 với cơ sở J_0 có $\theta_0 = \min_{x_{ik} > 0} \left\{ \frac{x_{io}}{x_{ik}} \right\}$ đạt tại nhiều chỉ số, chẳng hạn trên tập $R_1 \subset J_0$, lúc này nhiều véc tơ cơ sở có thể đưa ra khỏi cơ sở J_0 , vấn đề ta nên chọn véc tơ nào để tránh hiện tượng xoay vòng? Không mất tính tổng quát, giả sử $J_0 = \overline{1, m}$, ta xét các chỉ số:

$$\frac{a_{\alpha 1}}{a_{\alpha k}} (\alpha \in R_1, a_{\alpha k} > 0),$$

nếu giá trị nhỏ nhất của các chỉ số trên không duy nhất mà đạt tại nhiều chỉ số, chẳng hạn trên tập $R_2 \subset R_1$ thì ta chuyển sang xét các tỷ số:

$$\frac{a_{\beta 2}}{a_{\beta k}} (\beta \in R_2, a_{\beta k} > 0).$$

Cứ như vậy cho đến khi xét được cực tiểu duy nhất, véc tơ ứng với cực tiểu duy nhất sẽ bị loại ra khỏi cơ sở.

Chú ý: Trong nhiều trường hợp giải bài toán quy hoạch tuyến tính, khi gặp trường hợp véc tơ loại khỏi cơ sở không duy nhất, người ta không cần dùng quy tắc từ vựng mà chỉ loại một cách ngẫu nhiên cũng đủ để không gặp hiện tượng quay vòng.

7. PHƯƠNG PHÁP TÌM PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN XUẤT PHÁT

7.1. Bài toán giả tạo

Trong thuật toán đã nêu ở mục 6, giả thiết biết trước phương án cực biên xuất phát và khi thực hiện bảng đơn hình chúng ta giả thiết ma trận ràng buộc A chứa ma trận đơn vị cấp m thì khi đó chọn các véc tơ A_i đơn vị tương ứng để tạo nên cơ sở liên kết và phương án cực biên xuất phát ban đầu có $x_i = b_i$, với i thuộc vào tập chỉ số của véc tơ hệ cơ sở và $x_{ij} = a_{ij}$.

Trong bài này, chúng ta sẽ nghiên cứu một phương pháp tìm phương án cực biên xuất phát khi chưa có ma trận đơn vị gọi là *phương pháp phạt* (hay *bài toán M*).

Cho bài toán QHTT dạng chính tắc

$$f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \quad (1.6)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, m} \\ \forall x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\quad (1.8)$$

trong đó ma trận A không chứa ma trận đơn vị, $b_i > 0$ với $\forall i = \overline{1, m}$.

Khi đó ta có *bài toán giả tạo* (hay *bài toán M*) như sau:

$$f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + M \left(\sum_{i=1}^m x_{n+i} \right) \rightarrow \min \quad (1.6)'$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, i = \overline{1, m} \\ \forall x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (1.7)'$$

$$\quad (1.8)'$$

trong đó M là số thực dương lớn tùy ý.

Các ẩn $x_{n+i} \geq 0$ với $\forall i = \overline{1, m}$ gọi là ẩn giả tạo.

Ta thấy hệ véc tơ đơn vị $\{A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_{n+m}\}$ là hệ véc tơ độc lập tuyến tính

nên $\overline{X}_0 = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, b_1, b_2, \dots, b_m \right)$ là phương án cực biên của bài toán M.

Ví dụ 1.11: Xét bài toán $f(X) = x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Đưa bài toán về dạng chính tắc bằng cách đưa vào các ẩn phụ $x_4, x_5 \geq 0$.

$$g(X) = -f(X) = -x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Ta chỉ mới có A_4 là vectơ đơn vị. Cần đưa thêm hai ẩn giả tạo x_6, x_7 để được bài toán giả tạo:

$$g(X) = -f(X) = -x_1 - 2x_2 + x_3 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_7 = 4 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,7} \end{cases}$$

Khi đó phương án cực biên của bài toán giả tạo với cơ sở liên kết đơn vị $\{A_4, A_6, A_7\}$ là $\bar{X} = (0, 0, 0, 6, 0, 6, 4)$

Nhận xét: i) Chúng ta cần phân biệt ẩn giả tạo với ẩn phụ.

+ Ẩn phụ nhằm mục đích đưa bài toán về dạng chính tắc

+ Ẩn giả tạo nhằm mục đích tạo ra ma trận đơn vị cấp m để từ đó tìm ra phương án cực biên xuất phát với cơ sở liên kết đơn vị. Vì vậy ta chỉ cần bổ sung thêm các ẩn giả tạo nếu cần thiết.

+ Hệ số hàm mục tiêu của ẩn phụ $c_j = 0$ còn hệ số hàm mục tiêu của ẩn giả tạo $c_{n+i} = M > 0$ lớn tùy ý.

ii) Xuất phát từ phương án cực biên $\overline{X}_o$ ta có thể giải bài toán giả tạo bằng phương pháp đơn hình. Vấn đề đặt ra là giữa bài toán (1.6) – (1.8) và (1.6)' – (1.8)' có mối quan hệ như thế nào? Định lý sau sẽ cho ta câu trả lời.

7.2. Mối quan hệ về phương án tối ưu của bài toán giả tạo và bài toán chính tắc tương ứng

Định lý 1.13. *Có thể tìm được số $M_0 > 0$ đủ lớn, sao cho với mọi $M > M_0$ thì*

a) Bài toán (1.6) – (1.8) có phương án tối ưu X khi và chỉ khi bài toán giả tạo có phương án tối ưu $\overline{X}^ = (X, w)$ và $w = 0$ (trong đó w là thành phần của ẩn giả tạo).*

b) Nếu bài toán giả tạo có phương án tối ưu $\overline{X}^ = (X, w)$, trong đó $w \neq 0$ (tức là có chứa ít nhất một thành phần $\neq 0$) thì bài toán (1.6) – (1.8) không có phương án tối ưu.*

Chú ý: i) Nếu bài toán giả tạo không có phương án tối ưu thì bài toán (1.6) – (1.8) cũng không có phương án tối ưu.

ii) Trong khi giải bài toán giả tạo ta không cần phải xác định cụ thể số M_0 là bao nhiêu, chỉ cần xem M là số lớn hơn bất cứ số nào cần so sánh với nó trong suốt quá trình tính toán.

Do hàm mục tiêu của bài toán giả tạo là một hàm tuyến tính đối với M nên các ước lượng Δ_j sẽ có dạng $\Delta_j = \alpha_j M + \beta_j$.

Vì số M là rất lớn nên so sánh các Δ_j ta có quy tắc sau:

$\Delta_j < 0$ nếu $\alpha_j < 0$ (bất kể β_j) hoặc $(\alpha_j = 0, \beta_j < 0)$.

$\Delta_j > 0$ nếu $\alpha_j > 0$ (bất kể β_j) hoặc $(\alpha_j = 0, \beta_j > 0)$.

$\Delta_j > \Delta_k$ nếu $\alpha_j > \alpha_k$ hoặc $(\alpha_j = \alpha_k, \beta_j > \beta_k)$.

Khi giải bài toán ta có thể tách hàng Δ_j thành hai hàng; dòng trên ghi β_j , dòng dưới ghi α_j .

iii) Khi A_{n+i} không tham gia trong cơ sở nữa thì ta không cần tính cột $n + i$.

Ví dụ 12: Trở lại bài toán trên, với cơ sở liên kết đơn vị $\{A_4, A_6, A_7\}$ ta có phương án cực biên xuất phát là $\overline{X}_o = (0,0,0,6,06,4)$. Ta có bảng đơn hình (Bảng 1.7):

Bảng 1.7

Bảng số	Cơ sở A_i	Hệ số c_i	Tọa độ x_{i0}	-1	-2	1	0	0	M	M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
I	A_4	0	6	-1	4	-2	1	0	0	0
	A_6	M	6	1	1	2	0	-1	1	0
	$\Leftarrow A_7$	M	4	2	-1	(2)	0	0	0	1
	β_j	0		1	2	$-1 \uparrow$	0	0	0	0
	α_j	10		3	0	4	0	-1	0	0
II	A_4	0	10	1	3	0	1	0	0	
	$\Leftarrow A_6$	M	2	-1	(2)	0	0	-1	1	
	A_3	1	2	1	$-1/2$	1	0	0	0	
	β_j	2		2	$-3/2$	0	0	0	0	
	α_j	2		-1	$2 \uparrow$	0	0	-1	0	
III	$\Leftarrow A_4$	0	7	(5/2)	0	0	1	$3/2$		
	A_2	-2	1	$-1/2$	1	0	0	$-1/2$		
	A_3	1	$5/2$	$3/4$	0	1	0	$-1/4$		
	$1/2$			$11/4 \uparrow$	0	0	0	$3/4$		
IV	A_1	-1	$14/5$	1	0	0	$2/5$	$3/5$		
	A_2	-2	$12/5$	0	1	0	$1/5$	$-1/5$		
	A_3	1	$2/5$	0	0	1	$-3/10$	$-7/10$		
	$-36/5$			0	0	0	$-11/10$	$-9/10$		

Tại bảng IV, có $\Delta_j \leq 0, \forall j = \overline{1,5}$ nên ta có phương án tối ưu là:

$$X = \left(\frac{14}{5}, \frac{12}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0, 0 \right) \text{ và } f_{\max} = -g_{\min} = \frac{36}{5}.$$

Như vậy: Để giải một bài toán QHTT không suy biến bất kỳ ta thực hiện theo các bước sau:

- a) Đưa bài toán về dạng chính tắc nếu nó không ở dạng chính tắc.
- b) Thêm biến giả tạo và giải bài toán giả tạo nếu chưa biết phương án cực biên xuất phát.
- c) Từ lời giải của bài toán chính tắc hay bài toán giả tạo ta suy ra lời giải của bài toán đã cho.

Chương 2

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH ĐỐI NGẪU

Chương này đề cập tới vấn đề đối ngẫu trong quy hoạch tuyến tính (QHTT). Đối ngẫu là một phương pháp mà tương ứng với mỗi bài toán quy hoạch tuyến tính đã cho (gọi là bài toán gốc) ta có thể thiết lập một bài toán quy hoạch tuyến tính khác (gọi là bài toán đối ngẫu) sao cho từ lời giải của bài toán này ta sẽ thu được thông tin về lời giải của bài toán kia.

Sau đây, chúng tôi trình bày cách xây dựng bài toán đối ngẫu của một bài toán quy hoạch tuyến tính đã cho, nêu các định lý đối ngẫu cơ bản và phương pháp đơn hình đối ngẫu.

1. KHÁI NIỆM BÀI TOÁN QHTT ĐỐI NGẪU

1.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu không đối xứng

Cho bài toán QHTT dạng chính tắc (I):

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j \rightarrow \min \quad (2.1)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, & i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, & j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$(2.3)$$

Định nghĩa 2.1. Bài toán QHTT ($\bar{I}$) sau

$$g(X) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m = \sum_{i=1}^m b_iy_i \rightarrow \max \quad (2.1)'$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \leq c_j, & j = \overline{1, n} \\ y_i \in \mathbf{R}, & i = \overline{1, m} \end{cases} \quad (2.2)'$$

được gọi là *bài toán QHTT đối ngẫu* của *bài toán gốc* (I).

Cặp bài toán (I) và bài toán ($\bar{I}$) được gọi là *cặp bài toán QHTT đối ngẫu không đối xứng*.

Nhận xét: Phân tích cấu trúc của hai bài toán, ta có thể rút ra những nhận xét, đồng thời là những nguyên tắc thành lập bài toán đối ngẫu:

(i) Nếu *bài toán gốc* tìm Min thì *bài toán đối ngẫu* tìm Max và hệ ràng buộc của bài toán đối ngẫu có dạng “ $\leq$ ”.

(ii) Số ràng buộc (không kể ràng buộc về dấu) trong bài toán này bằng số biến số trong bài toán kia, từ đó ta thấy tương ứng với mỗi ràng buộc của bài toán này là một biến số của bài toán kia.

(iii) Hệ số trong hàm mục tiêu của bài toán này là vế phải của hệ ràng buộc trong bài toán kia.

(iv) Ma trận điều kiện trong hai bài toán là chuyển vị của nhau.

(v) Các biến số trong bài toán đối ngẫu không có ràng buộc về dấu.

Định nghĩa 2.2. Các cặp bất phương trình sau

$$x_j \geq 0 \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \leq c_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad \text{và} \quad y_i \in \mathbf{R}, \quad i = \overline{1, m}.$$

được gọi là các *cặp điều kiện đối ngẫu*.

Ví dụ 2.1: Cho bài toán QHTT

$$\begin{aligned} f(X) &= 13x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 19x_4 \rightarrow \min \\ \text{với điều kiện} \quad &\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 44 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 23 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 6x_4 = 96 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4} \end{cases} \end{aligned}$$

Viết bài toán đối ngẫu cho bài toán này và chỉ ra các cặp điều kiện đối ngẫu.

Giải:

Do bài toán gốc tìm Min nên bài toán đối ngẫu tìm Max và bài toán gốc có 3 ràng buộc (không kể ràng buộc về dấu) nên bài toán đối ngẫu có số ẩn là 3. Hệ số hàm mục tiêu của bài toán đối ngẫu tương ứng là vế phải hệ ràng buộc của bài toán gốc.

Do đó $g(Y) = 44y_1 + 23y_2 + 96y_3 \rightarrow \max$

Các cặp điều kiện đối ngẫu:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 44 & \text{và } y_1 \in \mathbf{R} \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 23 & \text{và } y_2 \in \mathbf{R} \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 6x_4 = 96 & \text{và } y_3 \in \mathbf{R} \\ x_1 \geq 0 & \text{và } 2y_1 - y_2 + 3y_3 \leq 13 \\ x_2 \geq 0 & \text{và } y_1 + 2y_2 - 3y_3 \leq -3 \\ x_3 \geq 0 & \text{và } -y_1 + 3y_2 - 3y_3 \leq -4 \\ x_4 \geq 0 & \text{và } 3y_1 + y_2 + 6y_3 \leq 19 \end{cases}$$

Ta có bài toán đối ngẫu:

$$\begin{aligned} g(Y) &= 44y_1 + 23y_2 + 96y_3 \rightarrow \max \\ \text{với điều kiện } \begin{cases} y_1, y_2, y_3 \in \mathbf{R} \\ 2y_1 - y_2 + 3y_3 \leq 13 \\ y_1 + 2y_2 - 3y_3 \leq -3 \\ -y_1 + 3y_2 - 3y_3 \leq -4 \\ 3y_1 + y_2 + 6y_3 \leq 19 \end{cases} \end{aligned}$$

Chú ý: Nếu bài toán gốc (I) được viết dưới dạng ma trận

$$\begin{aligned} f(X) &= CX \rightarrow \min \\ \text{với điều kiện } \begin{cases} AX = B \\ X \geq O \end{cases} \end{aligned}$$

thì bài toán đối ngẫu ($\bar{I}$) có dạng:

$$\begin{aligned} g(Y) &= YB \rightarrow \max \\ \text{với điều kiện } YA &\leq C, \end{aligned}$$

trong đó O là ma trận không cấp $n \times 1$, $Y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m)$ là ma trận hàng cấp $1 \times m$.

1.2. Quy tắc thành lập bài toán đối ngẫu

Đối với bài toán bất kỳ để xác định bài toán đối ngẫu, trước hết ta đưa về bài toán dạng chính tắc, sau đó xây dựng bài toán đối ngẫu của bài toán này và gọi nó là bài toán đối ngẫu của bài toán đã cho. Việc làm trên khá phức tạp do đó chúng ta

có thể sử dụng các quy tắc nêu trong lược đồ dưới đây để trực tiếp viết bài toán đối ngẫu mà không cần phải thực hiện bước biến đổi về dạng chính tắc.

LƯỢC ĐỒ TỔNG QUÁT

Dạng 1.

Bài toán gốc: $f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$	Bài toán đối ngẫu: $g(Y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \max$
* Nếu $x_j \geq 0$	thì $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j$.
* Nếu $x_j \leq 0$	thì $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j$.
* Nếu x_j không ràng buộc về dấu	thì $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j$.
* Nếu $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$	thì y_i không ràng buộc về dấu.
* Nếu $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$	thì $y_i \leq 0$.
* Nếu $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$	thì $y_i \geq 0$.

Dạng 2.

Bài toán gốc: $f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$	Bài toán đối ngẫu: $g(Y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min$
* Nếu $x_j \geq 0$	thì $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j$.
* Nếu $x_j \leq 0$	thì $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j$.
* Nếu x_j không ràng buộc về dấu	thì $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j$.

Bài toán gốc: $f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$	Bài toán đối ngẫu: $g(Y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min$
* Nếu $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$	thì y_i không ràng buộc về dấu.
* Nếu $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$	thì $y_i \geq 0$.
* Nếu $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$	thì $y_i \leq 0$.

Chú ý: Do tính đối xứng của cặp bài toán đối ngẫu nên khái niệm bài toán gốc và bài toán đối ngẫu chỉ mang tính tương đối, nghĩa là nếu bài toán này là bài toán gốc thì bài toán kia là bài toán đối ngẫu và ngược lại.

Ví dụ 2.2: Viết bài toán đối ngẫu của bài toán sau:

$$f(X) = -4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_5 \rightarrow \min$$

với điều kiện

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 \geq -15 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + x_5 \leq 8 \\ -6x_2 + 3x_3 + 8x_4 - 4x_5 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 \geq 24 \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \leq 0, \quad x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Giải: Bài toán đối ngẫu có dạng

$$g(Y) = -15y_1 + 8y_2 + 9y_3 + 24y_4 \rightarrow \max$$

với điều kiện

$$\begin{cases} 3y_1 - 2y_2 + 3y_4 \leq -4 \\ -6y_1 + 3y_2 - 6y_3 + 2y_4 = 1 \\ -y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 5 \\ 2y_1 - 5y_2 + 8y_3 - 3y_4 = 0 \\ \begin{cases} 4y_1 + y_2 - 4y_3 + y_4 \leq 3 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \leq 0 \\ y_4 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

1.3. Bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu đối xứng

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính *dạng chuẩn tắc* (II)

$$f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \quad (2.4)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, & i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, & j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

Khi đó bài toán đối ngẫu của bài toán (II) là bài toán (II')

$$g(Y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \max \quad (2.4)'$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, & j = \overline{1, n} \\ y_i \geq 0, & i = \overline{1, m} \end{cases} \quad (2.5)'$$

$$(2.6)'$$

Định nghĩa 2.3. Cặp bài toán (II) và bài toán (II') được gọi là *cặp bài toán đối ngẫu đối xứng*.

Dùng các ký hiệu ma trận ta có thể viết cặp bài toán QHTT đối ngẫu đối xứng trên như sau:

Bài toán gốc

Bài toán đối ngẫu

$$\min \{f(X) = CX\}$$

$$\max \{g(Y) = YB\}$$

$$\text{Với điều kiện } \begin{cases} AX \geq B \\ X \geq O_{n \times 1} \end{cases}$$

$$\text{Với điều kiện } \begin{cases} YA \leq C \\ Y \geq O_{1 \times m} \end{cases}$$

Chú ý: Cặp bài toán QHTT đối ngẫu đối xứng trên có $m + n$ cặp điều kiện đối ngẫu.

Ví dụ 2.3: Tìm bài toán đối ngẫu của bài toán

$$f(X) = 2x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Giải: Bài toán đối ngẫu là

$$g(Y) = 2y_1 + 5y_2 \rightarrow \max$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 2 \\ 2y_1 - y_2 \leq -1 \\ -y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. CÁC ĐỊNH LÝ ĐỐI NGẪU

Ta có các định lý sau đây phản ánh mối quan hệ giữa bài toán gốc và bài toán đối ngẫu. Các chứng minh được thực hiện cho cặp bài toán đối ngẫu không đối xứng. Sự đúng đắn của các kết luận đối với cặp bài toán đối ngẫu tùy ý được suy ra từ nhận xét mọi cặp bài toán đối ngẫu có thể đưa được về dạng cặp bài toán đối ngẫu không đối xứng.

Xét cặp bài toán QHTT đối ngẫu không đối xứng

Bài toán gốc (I)	Bài toán đối ngẫu ($\bar{I}$)
$f(X) = CX \rightarrow \min$	$g(Y) = YB \rightarrow \max$
Với điều kiện $\begin{cases} AX = B \\ X \geq O_{n \times l} \end{cases}$	với điều kiện $YA \leq C$

Định lý 2.1. Giả sử X là phương án tùy ý của bài toán gốc (I), Y là phương án tùy ý của bài toán đối ngẫu ($\bar{I}$). Khi đó ta luôn có $f(X) \geq g(Y)$.

Chứng minh: Giả sử X là phương án tùy ý của bài toán (I), Y là phương án tùy ý của bài toán ($\bar{I}$).

$$f(X) = CX = \sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i = \sum_{i=1}^m b_i y_i = YB = g(Y)$$

Vậy $f(X) \geq g(Y)$. ■

Định lý 2.2. Nếu X^* là phương án của bài toán (I), Y^* là phương án của bài toán $(\bar{I})$ thỏa mãn $f(X^*) = g(Y^*)$ thì X^* là phương án tối ưu của bài toán (I) và Y^* là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu $(\bar{I})$.

Chứng minh: Giả sử X là phương án bất kỳ của bài toán (I), theo định lý 2.1 chương 2, ta có

$$f(X) \geq g(Y^*) = f(X^*), \forall X$$

Suy ra $\min\{f(X)\} = f(X^*)$. Do đó X^* là phương án tối ưu của bài toán (I).

Tương tự, lấy Y là phương án bất kỳ của bài toán $(\bar{I})$, ta có

$$g(Y) \leq f(X^*) = g(Y^*), \forall Y$$

Suy ra $\max\{g(Y)\} = g(Y^*)$. Do đó Y^* là phương án tối ưu của bài toán $(\bar{I})$.

■

Hệ quả 2.1. Cặp bài toán đối ngẫu (I) và $(\bar{I})$ có phương án tối ưu khi và chỉ khi chúng có phương án.

Chứng minh: Điều kiện cần: Hiển nhiên.

Điều kiện đủ: Giả sử X_0, Y_0 là cặp phương án của bài toán (I), $(\bar{I})$. Để chứng minh bài toán (I) và $(\bar{I})$ có phương án tối ưu, ta chứng minh hàm mục tiêu của chúng bị chặn.

Thật vậy, lấy X là phương án bất kỳ của bài toán (I), theo định lý 2.1 chương 2, ta có:

$$f(X) \geq g(Y_0), \forall X$$

Suy ra hàm mục tiêu $f(X)$ bị chặn dưới trong tập phương án của bài toán gốc (I), theo định lý 1.7 chương 1 thì bài toán gốc (I) phải có phương án tối ưu.

Vẫn theo định lý 2.1 chương 2, ta có

$$g(Y) \leq f(X_0), \forall Y.$$

Suy ra $g(Y)$ bị chặn trên trong tập phương án của bài toán $(\bar{I})$, theo định lý 1.7 chương 1, thì bài toán $(\bar{I})$ phải có phương án tối ưu. ■

Hệ quả 2.2. Nếu một trong hai bài toán (I) hoặc $(\bar{I})$ có tập phương án khác $\emptyset$ nhưng không có phương án tối ưu thì bài toán kia có tập phương án là $\emptyset$.

Chứng minh: (Sinh viên tự chứng minh xem như bài tập)

Định lý 2.3. (Định lý đối ngẫu thứ nhất)

Nếu một trong hai bài toán của cặp bài toán đối ngẫu có phương án tối ưu thì bài toán kia cũng có phương án tối ưu, đồng thời

$$\min \{f(X)\} = \max \{g(Y)\}$$

Ta thừa nhận định lý vừa nêu.

Định lý 2.4. (Định lý lệch – bù hay định lý đối ngẫu thứ hai)

Cặp phương án X^*, Y^* tương ứng của cặp bài toán đối ngẫu là tối ưu khi và chỉ khi trong từng cặp điều kiện đối ngẫu, nếu điều kiện này thỏa mãn lỏng thì điều kiện kia thỏa mãn chặt.

Áp dụng của các định lý đối ngẫu.

1. Khảo sát sự tồn tại phương án, phương án tối ưu

Ví dụ 1: Cho bài toán QHTT

$$\begin{aligned} f(X) &= 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \rightarrow \min \\ \text{với điều kiện } \begin{cases} x_1 - x_2 &= 15 \\ &x_3 - x_4 = 8 \\ x_j &\geq 0, j = \overline{1, 4} \end{cases} \end{aligned}$$

Hãy viết bài toán đối ngẫu và chứng tỏ nó có phương án tối ưu?

Giải: Bài toán đối ngẫu

$$\begin{aligned} g(Y) &= 15y_1 + 8y_2 \rightarrow \max \\ \text{với điều kiện } \begin{cases} y_1 &\leq 2 \\ -y_1 &\leq -1 \\ &y_2 \leq 3 \\ &-y_2 \leq -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Dễ dàng thấy rằng $X(15, 8)$ và $Y(1, 2)$ là các phương án của cặp bài toán đối ngẫu. Theo hệ quả 1, suy ra bài toán có phương án tối ưu.

Mặt khác, do hạng của hệ ràng buộc của bài toán đối ngẫu bằng 2 do đó nó có phương án cực biên tối ưu.

2. Kiểm tra một phương án có tối ưu hay không.

- Nếu biết cặp phương án X^*, Y^* thì chỉ cần kiểm tra điều kiện $f(X^*) = f(Y^*)$
- Nếu chỉ biết phương án X^* thì sử dụng định lý lệch bù tìm phương án Y^* của bài toán đối ngẫu.

Ví dụ 2: Cho bài toán QHTT

$$\begin{aligned} f(X) &= 2x_1 + 4x_2 + \lambda x_3 \rightarrow \max \\ \text{với điều kiện } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 - 3x_4 \leq 3 \\ x_j \geq 0, \forall j = 1, 4 \end{cases} \end{aligned}$$

a) Hãy chứng tỏ $X_0(1, 1, 0, 0)$ là phương án cực biên đồng thời tại $\lambda = 0$ nó cũng là phương án tối ưu.

b) Tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Xác định λ để bài toán có vô số phương án tối ưu.

Giải: a) Thử lại ta thấy ngay X_0 là phương án của bài toán đã cho. Mặt khác X_0 thỏa mãn chặt 4 ràng buộc độc lập, vậy nó là phương án cực biên.

Xét bài toán đối ngẫu

$$\begin{aligned} 4y_1 + 3y_2 + 3y_3 &\rightarrow \min \\ \text{với điều kiện } \begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \geq 4 \\ y_2 \geq \lambda \\ y_1 - 3y_3 \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Áp dụng định lý lệch bù, ở đây $x_1, x_2 > 0$ và X_0 thỏa mãn lỏng điều kiện thứ 3 nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 = 4 \\ y_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow Y\left(\frac{6}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$$

Thử lại ta thấy Y_0 là phương án của bài toán đối ngẫu. Vậy tại $\lambda = 0$, X_0 là phương án tối ưu.

b) Rõ ràng tại $\lambda = 0$, Y_0 cũng là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Không những thế, với mọi $\lambda \leq \frac{2}{5}$ thì Y_0 cũng là phương án của bài toán đối ngẫu. Do đó

với mọi $\lambda \leq \frac{2}{5}$ ta có X_0 là phương án tối ưu.

Với $\lambda < \frac{2}{5}$, Y_0 thỏa mãn lỏng ràng buộc thứ 3, $y_1, y_2 > 0$, do đó phương án tối ưu X (nếu có) phải thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Giải ra ta được } X = \left(\frac{5+x_4}{5}, \frac{5-2x_4}{5}, 0, x_4 \right)$$

Để X là phương án thì X phải thỏa mãn các điều kiện còn lại $x_1, x_2, x_4 \geq 0$ và $x_2 - 3x_4 \leq 3$. Từ đó suy ra

$$-\frac{1}{5} \leq x_4 \leq \frac{2}{5}$$

Vậy khi $\lambda < \frac{2}{5}$ thì tập phương án tối ưu của bài toán gốc là

$$X = \left(\frac{5+x_4}{5}, \frac{5-2x_4}{5}, 0, x_4 \right), \text{ với } -\frac{1}{5} \leq x_4 \leq \frac{2}{5}.$$

3. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH ĐỐI NGẪU

3.1. Nội dung phương pháp

Về thực chất, đây là phương pháp đơn hình áp dụng vào bài toán đối ngẫu, nhưng để tìm lời giải của bài toán gốc. Phương pháp này do Lemke G. E. đề xuất năm 1954.

Phương pháp đơn hình giải bài toán QHTT bắt đầu từ một phương án cực biên xuất phát (nghiệm đúng $AX = B$ và $X \geq 0$) mà chưa thỏa mãn tiêu chuẩn tối ưu. Sau mỗi bước lặp ta tìm được một phương án cực biên mới tốt hơn phương án cũ và quá trình này tiếp tục cho đến khi tìm được một phương án thỏa mãn tiêu chuẩn tối ưu.

Phương pháp đơn hình đối ngẫu, lại xuất phát từ một “giả phương án” (nghiệm đúng phương trình $AX = B$) mà nó thỏa mãn tiêu chuẩn tối ưu ($\forall \Delta_j \leq 0$) nhưng không thỏa mãn $X \geq 0$, nghĩa là bảng đơn hình ban đầu không có phần tử dương trong dòng ước lượng (dòng cuối) nhưng lại có phần tử âm ở cột phương án (vì thế có tên là *cột giả phương án*). Các bảng đơn hình được biến đổi sao cho luôn đảm bảo điều kiện tối ưu và quá trình này tiếp diễn cho đến khi nhận được phương án (không còn phần tử âm trong cột Giả phương án). Phương án đó được gọi là phương án tối ưu.

3.2. Thuật toán đơn hình đối ngẫu

Bước 1. Xuất phát từ hệ m vector độc lập tuyến tính có ma trận $D = [A_j]$ với $j \in J, |J| = m$, sao cho mọi $\Delta_j \leq 0, j = \overline{1, n}$.

Tìm giả phương án $X_0 = (X^*, 0)$, trong đó $X^* = C^* D^{-1}$, với $C^* = (c_i)_{i \in J}$; $x_j = 0, \forall j \notin J$.

Bước 2. Kiểm tra $x_i \geq 0, \forall i \in J$?

- + Nếu có, thì X là phương án tối ưu.
- + Nếu không, thì sang bước 3.

Bước 3. Tại $x_i < 0$, kiểm tra $x_{ij} \geq 0, \forall j = \overline{1, n}$?

- + Nếu có, bài toán không có phương án tối ưu.

+ Nếu không, sang bước 4.

Bước 4. Tồn tại $x_i < 0$, tồn tại $x_{ij} < 0$.

Chọn $x_l = \min_{x_i < 0} x_i \Rightarrow$ đưa A_l ra khỏi cơ sở.

Bước 5. Tìm phần tử trực x_{lk} từ cách chọn:

$$\beta_0 = \min_{x_{lj} < 0} \left\{ \frac{\Delta_j}{x_{lj}} \right\} = \frac{\Delta_k}{x_{lk}} \Rightarrow \text{đưa } A_k \text{ vào cơ sở mới.}$$

Bước 6. Xây dựng phương án X_1 bằng cách biến đổi bảng đơn hình như thường lệ.

Gán $X_0 := X_1$, rồi trở lại bước 2.

Chú ý: Trong trường hợp bài toán đối ngẫu suy biến thì có thể $\theta_0 = 0$, khi $\theta_0 = 0$ ta vẫn áp dụng thuật toán bình thường, điều này làm nảy sinh khả năng xuất hiện hiện tượng xoay vòng. tuy nhiên, giống như phương pháp đơn hình, trong thực tế tính toán ta dễ dàng thoát khỏi hiện tượng xoay vòng.

Dấu hiệu xuất hiện phương án cực biên suy biến là θ_0 đạt tại nhiều chỉ số, khi đó các véc tơ ứng với θ_0 đều có thể đưa vào cơ sở, vì vậy ta chọn véc tơ bất kỳ một cách ngẫu nhiên trong số chúng đưa vào cơ sở mà không cần sử dụng quy tắc từ vựng.

Ví dụ 2.6: Giải bài toán sau đây bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu

$$f(X) = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 6 \\ x_1 + x_4 \geq 3 \\ 4x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Giải: Đưa thêm ẩn phụ $x_6 \geq 0$, ta có bài toán dạng chính tắc

$$f(X) = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 6 \\ -x_1 - x_4 + x_6 = -3 \\ 4x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Nếu chọn cơ sở $A_3A_6A_2$, ta được giả phương án

$$X_0 = (0, 5, 6, 0, 0, -3)$$

Ta có bảng đơn hình đối ngẫu:

Bảng 2.1

Bảng số	Cơ sở A_i	Hệ số c_i	Tọa độ x_{i0}	1	-1	1	1	1	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
I	A_3	1	6	2	0	1	-1	3	0
	$\Leftarrow A_6$	0	-3	-1	0	0	(-1)	0	1
	A_2	-1	5	4	1	0	-1	2	0
	$f(X) = 1$			-3	0	0	-1↑	0	0
II	A_3	1	9	3	0	1	0	3	-1
	A_4	1	3	1	0	0	1	0	-1
	A_2	-1	8	5	1	0	0	2	-1
	$f(X) = 4$			-2	0	0	0	0	-1

Tại bảng II, có các phần tử trong cột giả phương án đều không âm nên phương án tối ưu của bài toán là

$$X(0, 8, 9, 3, 0) \text{ và } f_{\min} = 4.$$

Chương 3

BÀI TOÁN VẬN TẢI

1. CÁC KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT CỦA BÀI TOÁN VẬN TẢI

1.1. Nội dung kinh tế và các dạng toán học của bài toán vận tải

1.1.1. Nội dung kinh tế của bài toán

Giả sử cần vận chuyển một loại hàng hóa từ m trạm phát, ký hiệu là A_i ($i = \overline{1, m}$). Lượng hàng cần chuyển đi ở mỗi trạm A_i tương ứng là a_i (đơn vị hàng), tới n trạm cần thu hàng, ký hiệu B_j ($j = \overline{1, n}$), lượng hàng cần thu về ở mỗi trạm B_j tương ứng b_j (đơn vị hàng). Giả sử cước phí vận chuyển từ trạm phát hàng A_i tới trạm thu B_j là c_{ij} (đơn vị tùy theo qui ước).

Giả thiết $a_i > 0$, $b_j > 0$, $c_{ij} \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$) và $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = Q$ (bài toán cân bằng thu phát).

Hãy lập kế hoạch vận chuyển hàng hoá sao cho tổng chi phí vận chuyển nhỏ nhất đồng thời thoả mãn nhu cầu thu phát hàng (các trạm phát, phát hết hàng và các trạm thu, thu đủ hàng).

1.1.2. Mô hình toán học của bài toán

Xác định kế hoạch vận chuyển hàng nghĩa là xác định lượng hàng cần chuyển đi từ các trạm phát tới các trạm thu tương ứng. Gọi x_{ij} là lượng hàng hoá vận chuyển từ trạm phát A_i tới trạm thu B_j ($x_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$).

Mọi trạm phát, phát hết hàng nên ta có: $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \forall i = \overline{1, m}$.

Mọi trạm thu, thu đủ hàng nên ta có: $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \forall j = \overline{1, n}$.

Như vậy tổng chi phí vận chuyển là: $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$, và đòi hỏi phải cực tiểu.

Khi đó mô hình toán học của bài toán sẽ là:

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 11...1 & 00...0 & ... & 00...0 \\ 00...0 & 11...1 & ... & 00...0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 00...0 & 00...0 & ... & 11...1 \\ 10...0 & 10...0 & ... & 10...0 \\ 01...0 & 01...0 & ... & 01...0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 00...1 & 00...1 & ... & 00...1 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \\ n \end{array}$$

$\begin{array}{cccc} n & n & n & n \end{array}$

Nhận thấy ma trận A được chia làm 2m khối: m khối của m dòng đầu thì ở mỗi khối là một ma trận cấp m.n có một dòng có các phần tử là 1, còn các dòng khác các phần tử đều là 0; khối thứ k có dòng thứ k là 1 với $k = \overline{1, m}$. Còn m khối của n dòng sau thì mỗi khối là một ma trận đơn vị cấp n.

Gọi A_{ij} là cột hệ số của ẩn x_{ij} , ta có A_{ij} là véc tơ cột thứ j trong nhóm cột thứ i của ma trận A, khi đó ta luôn có $A_{ij} = E_i + E_{m+j}, \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, trong đó E_k là ma trận cấp (m.n, 1) có phần tử ở hàng thứ k là 1, các phần tử khác là 0.

Định nghĩa 3.1. Mọi bài toán qui hoạch tuyến tính có dạng toán học (3.1) (3.2)

(3.3) (3.4) với giả thiết $a_i > 0, b_j > 0, c_{ij} \geq 0 (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$; $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = Q$ được

gọi là *bài toán vận tải cân bằng thu phát*.

Ngoài bài toán vận tải cân bằng thu phát hay bài toán dạng *đóng* ta có hai bài toán vận tải không cân bằng thu phát hay bài toán dạng *mở* như sau:

$$+) \sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j :$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, (i = \overline{1, m})$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, (j = \overline{1, n})$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}).$$

$$+) \sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j :$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, (i = \overline{1, m})$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, (j = \overline{1, n})$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}).$$

Định nghĩa 3.2. Ma trận $X = (x_{ij})_{m,n}$ thoả mãn hệ các điều kiện (3.2) (3.3) (3.4) của bài toán vận tải cân bằng thu phát được gọi là một *phương án của bài toán hay một phương án phân phối hàng*.

Ký hiệu tập hợp các phương án của bài toán là D.

Định nghĩa 3.3. Phương án X thoả mãn yêu cầu (3.1) của hàm mục tiêu $f(X)$ được gọi là một *phương án tối ưu*.

Đặt: $\bar{X}$ là ma trận cột gồm m.n thành phần:

$$\bar{X} = (x_{11} \ x_{12} \ \dots \ x_{1n} \ x_{21} \ x_{22} \ \dots \ x_{2n} \ \dots \ x_{m1} \ x_{m2} \ \dots \ x_{mn})^c,$$

C là ma trận dòng gồm m.n thành phần:

$$C = (c_{11} \ c_{12} \ \dots \ c_{1n} \ c_{21} \ c_{22} \ \dots \ c_{2n} \ \dots \ c_{m1} \ c_{m2} \ \dots \ c_{mn}),$$

B là ma trận cột gồm m + n thành phần:

$$B = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$$

$A = (a_{ij})_{(m+n)(m,n)}$ ma trận hệ số các ẩn của (3.2) (3.3). Khi đó dạng (3.1) (3.2) (3.3) (3.4) có dạng ma trận sau:

$$f(\bar{X}) = C\bar{X} \rightarrow \min$$

$$A\bar{X} = B$$

$$\bar{X} \geq 0$$

1.2. Mô hình bảng của bài toán vận tải

1.2.1. Bảng vận tải

Ngoài cách mô tả bài toán dưới dạng tổng quát, do đặc thù của lớp bài toán vận tải, ta có thể mô tả bài toán dưới dạng bảng để thuận lợi cho việc tìm lời giải của bài toán.

Bảng 3.1

$\begin{array}{c} T \\ \diagdown \\ P \end{array}$	$B_1: b_1$	$B_2: b_2$	...	$B_n: b_n$
$A_1: a_1$	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
$A_2: a_2$	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...
$A_m: a_m$	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

Bảng 3.1 trên được gọi là *bảng vận tải*. Không tính dòng đầu (ghi lượng hàng của các trạm thu), cột đầu (ghi lượng hàng của các trạm phát) thì bảng có m dòng, n cột và m.n ô. Mỗi cột tương ứng cho một trạm phát, mỗi dòng tương ứng cho một trạm thu.

Ô nằm trên dòng i, cột j ký hiệu là ô (i, j). Góc trên bên trái ô (i, j) ta ghi giá cước c_{ij} , góc dưới bên phải ghi giá trị x_{ij} là lượng hàng vận chuyển từ trạm A_i đến trạm B_j , chú ý rằng ta chỉ ghi giá trị của x_{ij} vào ô (i, j) nếu $x_{ij} > 0$ và gọi ô đó là một *ô chọn*; nếu $x_{ij} = 0$ thì ta bỏ trống vị trí đó (trừ trường hợp đặc biệt) và gọi ô đó là *ô loại*.

Ký hiệu $C(X) = \{(i, j): x_{ij} > 0\}$.

1.2.2. Vòng và các tính chất

Định nghĩa 4. Một tập hợp gồm k ô ($k \geq 4$) trên bảng vận tải được đánh số thứ tự 1, 2, ..., k (xem ô đầu tiên là ô tiếp theo của ô cuối cùng) được gọi là một *vòng* nếu

chúng thỏa mãn điều kiện: hai ô liên tiếp phải cùng nằm trên một dòng hay một cột và không có ba ô liên tiếp cùng nằm trên một dòng hay một cột.

Vòng thường được ký hiệu là V và được biểu diễn:

$$V = \{(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \dots, (i_p, j_p)(i_p, j_1)\}$$

hoặc

$$V = \{(i_1, j_1), (i_2, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_p, j_p)(i_1, j_p)\},$$

$$\text{với } i_k \neq i_{k+1}, j_k \neq j_{k+1}, \forall k = 1, 2, \dots, p.$$

Ví dụ 1: Ta có một vòng như Bảng 3.2 sau:

$$V = \{(1,2), (3, 2), (3, 3), (5, 3), (5, 5), (1, 5)\}$$

Bảng 3.2

	(1) ←			(6)
	↓			↑
	(2) →	(3)		
		↓		
		(4) →		(5)

Nhận xét: Từ định nghĩa ta nhận thấy số ô của mỗi hàng hoặc mỗi cột mà vòng đi qua là hai ô, do đó tổng số các ô có mặt trên vòng luôn là một số chẵn và ít nhất phải có bốn ô.

Định nghĩa 3.5. Một tập hợp các ô mà từ đó có thể lấy ra được một số ô để tạo thành vòng thì tập hợp các ô đó được gọi là *có chứa vòng*.

Định lý 3.1. Cho K là một tập hợp các ô trên bảng vận tải

$$\{(A_{ij}): (i, j) \in K\} \tag{3.5}$$

Tập hợp K có chứa vòng khi và chỉ khi họ (3.5) là một họ véc tơ phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh: Cần: Giả sử K chứa vòng V có dạng:

$$V = (i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \dots, (i_p, j_p)(i_p, j_1).$$

Vì $A_{ij} = E_i + E_{m+j}$ nên rõ ràng ta có:

$$A_{i_1 j_1} - A_{i_1 j_2} + A_{i_2 j_2} - \dots + A_{i_p j_p} - A_{i_p j_1} = 0,$$

đẳng thức này chứng tỏ họ (3.5) là họ véc tơ phụ thuộc tuyến tính.

Đũ: Giả sử họ (3.5) phụ thuộc tuyến tính, khi đó ta có:

$$\sum_{(i,j) \in K} \alpha_{ij} A_{ij} = 0, \quad (3.6)$$

với ít nhất một hệ số $\alpha_{ij} \neq 0$. Từ (3.6) ta có:

$$\sum_{(i,j) \in K} \alpha_{ij} (E_i + E_{m+j}) = 0 \quad (3.7)$$

Giả sử $\alpha_{i_1 j_1} \neq 0$. Khi đó số hạng $\alpha_{i_1 j_1} A_{i_1 j_1} = \alpha_{i_1 j_1} (E_{i_1} + E_{m+j_1})$ có hai thành phần thứ i_1 và $m + j_1$ là $\alpha_{i_1 j_1} \neq 0$. Để làm triệt tiêu thành phần thứ i_1 của số hạng này thì vế trái của (3.6) phải chứa ít nhất một số hạng có thành phần thứ i_1 khác không. Giả sử đó là số hạng thứ $i_1 j_2$: $\alpha_{i_1 j_2} A_{i_1 j_2} \neq 0$. Lại xuất hiện thành phần thứ $m + j_2$ khác 0. Để làm triệt tiêu thành phần này thì vế trái của (3.6) phải chứa ít nhất một số hạng có thành phần thứ $m + j_2$ khác 0. Giả sử đó là số hạng: $\alpha_{i_2 j_2} A_{i_2 j_2} \neq 0$. Lại xuất hiện thành phần thứ $i_2 \neq 0$ v.v... Vì vế trái của (3.6) là một tổng hữu hạn nên cuối cùng để làm triệt tiêu thành phần thứ $m + i_1$ (xuất hiện lúc đầu) thì vế trái của (3.6) phải chứa ít nhất một số hạng có thành phần thứ $m + i_1$ khác 0. Giả sử đó là số hạng $\alpha_{i_p j_1} A_{i_p j_1} \neq 0$. Đồng thời với việc chọn các số hạng khác không thì ta đã chọn ra được tập hợp các ô tương ứng là: $(i_1, j_1); (i_1, j_2); (i_2, j_2); \dots; (i_p, j_p); (i_p, j_1)$ tập hợp các ô này chính là một vòng và nó là một tập con của (3.5). Vậy (3.5) chứa vòng.

1.3. Tính chất của bài toán vận tải cân bằng thu phát

Định lý 3.2. Bài toán vận tải cân bằng thu phát (3.1) (3.2) (3.3) (3.4) luôn có phương án tối ưu.

Chứng minh: Áp dụng định lý 1.8, ta cần chỉ ra rằng bài toán có phương án và hàm mục tiêu $f(X)$ bị chặn dưới trên tập các phương án. Thật vậy:

Giả sử $X = (x_{ij}) \in D$, do $c_{ij} \geq 0$, $x_{ij} \geq 0 \forall i, j$ nên $f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \geq 0$. Như

vậy với mọi $X \in D$, hàm $f(x)$ bị chặn dưới trên D .

Đặt $x_{ij}^0 = \frac{a_i b_j}{Q}$, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$ ($\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = Q$). Đặt $X_0 = (x_{ij}^0)_{m,n}$. Khi đó ta có:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^0 = a_i, i = \overline{1, m}; \sum_{i=1}^m x_{ij}^0 = b_j, j = \overline{1, n}; x_{ij}^0 \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Vậy X_0 là một phương án của bài toán. Ta có điều phải chứng minh.

Định lý 3. Trong bài toán vận tải với dạng ma trận hạng của ma trận ràng buộc A là $\text{rank} A = m + n - 1$.

Chứng minh: Ta có tổng của m dòng đầu của ma trận A bằng tổng của n dòng sau của ma trận A và bằng $(1, 1, \dots, 1)$. Suy ra $m + n$ dòng của A phụ thuộc tuyến tính, do vậy $\text{rank} A \leq m + n - 1$. Ta sẽ chứng minh rằng $m + n - 1$ dòng của A kể từ dòng thứ hai là độc lập tuyến tính. Thật vậy: Gọi D_i là dòng thứ i của ma trận A , xét đẳng thức sau:

$$\sum_{i=2}^{m+n} \alpha_i D_i = 0. \quad (3.8)$$

Vế trái của (3.8) là một véc tơ gồm $m.n$ thành phần, ta xét n cột đầu. Khi đó từ (3.8) ta có $\sum_{i=m+1}^{m+n} \alpha_i d_{ij} = 0$, $\forall j = \overline{1, n}$; mà $d_{ij} = 1$ nếu $i = m + j$; $d_{ij} = 0$ nếu $i \neq m + j$.

Do vậy $\alpha_i = 0, \forall i = m + j, j = \overline{1, n}$. Hay $\alpha_{m+j} = 0, \forall j = \overline{1, n}$. Khi đó ta có

$$(3.8) \Leftrightarrow \sum_{i=2}^m \alpha_i D_i = 0.$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_2, \alpha_2, \dots, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_3, \dots, \alpha_3, \dots, \alpha_m, \alpha_m, \dots, \alpha_m) = 0.$$

$$\Rightarrow \alpha_k = 0, \forall k = \overline{2, m}.$$

$$\Rightarrow \alpha_k = 0, \forall k = \overline{2, m+n}.$$

Vậy $m + n - 1$ dòng sau của A độc lập tuyến tính, hay $\text{rank} A = m + n - 1$.

Từ kết quả này, ta thấy rằng khi giải bài toán vận tải bằng phương pháp đơn hình thì có thể bỏ đi một dòng bất kỳ của hệ ràng buộc.

Định lý 3.4. *Giả sử $X = (x_{ij})_{m,n}$ là một phương án của bài toán vận tải cân bằng thu phát (3.1) (3.2) (3.3) (3.4). Khi đó điều kiện cần và đủ để X là một phương án cực biên là $C(X)$ không chứa vòng.*

Chứng minh: Theo định lý 1.6 phương án X của bài toán chính tắc là phương án cực biên khi và chỉ khi $\{A_{ij} : x_{ij} > 0\}$ độc lập tuyến tính, mà

$$\{A_{ij} : x_{ij} > 0\} = \{A_{ij} : (i, j) \in C(X)\},$$

theo định lý 2.1 họ này độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $C(X)$ không chứa vòng.

Từ các định lý trên ta có các hệ quả sau:

Hệ quả 3.1. *Mọi tập hợp gồm nhiều hơn $m + n - 1$ ô trên bảng vận tải $m.n$ đều có chứa vòng.*

Hệ quả 3.2. *Điều kiện cần để phương án X là phương án cực biên là số thành phần dương thực sự của nó không vượt quá $m + n - 1$.*

Định nghĩa 3.6. Phương án cực biên X của bài toán vận tải (3.1) (3.2) (3.3) (3.4) được gọi là *phương án không suy biến* nếu nó có đủ $m + n - 1$ thành phần dương thực sự, nếu không thì phương án cơ bản đó gọi là *suy biến*.

Định nghĩa 3.7. Giả sử X là một phương án cực biên và J là một tập hợp gồm $m + n - 1$ ô không chứa vòng đồng thời J chứa các ô ứng với các thành phần dương thực sự của X . Khi đó J được gọi là *hệ ô chọn cơ sở* của phương án cực biên X .

Từ định nghĩa ta có, nếu phương án cực biên X không suy biến thì $C(X) \equiv J$ là hệ ô cơ sở duy nhất của X . Nếu X suy biến thì $C(X) \neq J$ và X có thể có nhiều hệ cơ sở khác nhau.

2. THUẬT TOÁN THỂ VỊ GIẢI BÀI TOÁN VẬN TẢI CÂN BẰNG THU PHÁT

2.1. Phương pháp tìm phương án cực biên xuất phát

2.1.1. Phương pháp cước phí bé nhất

Phương pháp này luôn ưu tiên phân phối cho ô có cước phí nhỏ nhất trên bảng. Nội dung phương pháp như sau:

Trên bảng vận tải, ta tìm ô có cước phí nhỏ nhất, phân vào ô đó một lượng hàng lớn nhất có thể được. Khi đó sẽ có ít nhất một dòng hay một cột thỏa mãn nhu cầu (nghĩa là trạm phát đã tiêu thụ hết hàng hoặc trạm thu đã nhận đủ số hàng so với nhu cầu), xóa bỏ dòng hay cột đó đi và lặp lại công việc này đối với các ô còn lại, sau một số hữu hạn bước lặp ta thu được ma trận $X = (x_{ij})_{m,n}$.

Tập hợp các giá trị $\{x_{ij}\}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ thu được từ cách tìm như trên là một phương án của bài toán, vì chúng thỏa mãn mọi ràng buộc. Hơn nữa nó còn là một phương án cực biên.

Thật vậy, theo cách phân phối, các ô chọn đều có $x_{ij} > 0$. Giả sử tập các ô chọn có một số ô tạo thành vòng có dạng:

$$V = \{(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \dots, (i_p, j_p), (i_p, j_1)\}.$$

Khi đó có các trường hợp sau xảy ra:

- Hoặc yêu cầu của trạm phát A_{i_1} thỏa mãn, hàng i_1 bị loại khỏi bảng, ô (i_1, j_2) không thể được phân phối.
- Hoặc yêu cầu của trạm thu B_{j_1} thỏa mãn, hàng j_1 bị loại khỏi bảng, ô (i_k, j_1) không thể được phân phối.
- Hoặc yêu cầu của cả trạm phát A_{i_1} và trạm thu B_{j_1} thỏa mãn, khi đó hàng i_1 và cột j_1 bị loại khỏi bảng, ô (i_1, j_2) và ô (i_k, j_1) không thể được phân phối.

Vậy X là phương án cực biên của bài toán vận tải cân bằng thu phát.

Ví dụ 3.1: Tìm phương án cực biên của bài toán vận tải sau (Bảng 3.1) bằng phương pháp cước phí nhỏ nhất.

Bảng 3.3

P \ T	30	20	25	35	40
30	13	7	6	2	12
20	5	1	10	5	11
40	10	5	3	7	14
60	6	3	2	11	10

Giải: Trên bảng vận tải 3.3, ta thấy ô (2, 2) có cước phí nhỏ nhất $c_{22} = 5$. Phân vào ô đó lượng hàng lớn nhất có thể được là $x_{22} = 20$. Khi đó trạm phát A_2 hết hàng và trạm thu B_2 nhận đủ hàng, trạm phát A_1 còn 80 đơn vị hàng. Xóa bỏ hàng 2, cột 2, lặp lại công việc trên sau một số hữu hạn bước, ta thu được phương án cực biên của bài toán như bảng (3.4).

Bảng 3.4

P \ T	30	20	25	35	40
30	13	7	6	2	12
20	5	1	10	5	11
40	10	5	3	7	14
60	6	3	2	11	10

Như vậy, phương án cực biên thu được là: $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 35 \\ 30 & 0 & 25 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Phương án X_0 có 7 ô chọn, thiếu một ô so với hạng của bài toán cân bằng thu phát. Ta lấy thêm một ô loại bổ sung thêm vào tập hợp 7 ô chọn để đủ 8 ô không chứa vòng. Chẳng hạn ô (1, 2), ta được tập ô cơ sở

$$J_0 = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5)\}.$$

2.1.2. Phương pháp Fogels

Nội dung phương pháp: Trên bảng vận tải, ta tính chênh lệch cước phí giữa hai ô có cước phí nhỏ nhất của mỗi dòng và mỗi cột. Xét dòng hay cột có chênh lệch lớn nhất và phân vào ô có cước phí nhỏ nhất của dòng hay cột đó một lượng hàng lớn nhất có thể được, bỏ đi các ô nằm trên các trạm đã được thỏa mãn. Sau đó tính lại chênh lệch cước phí của các cột hay dòng còn lại, lặp lại công việc trên sau một số hữu hạn lần, ta thu được ma trận $X = (x_{ij})_{m,n}$ là một phương án cực biên của bài toán vận tải cân bằng thu phát.

Ví dụ 3.2: Tìm phương án cực biên theo phương pháp Fogels của bài toán vận tải ở ví dụ 3.1.

Giải: Bằng phương pháp Fogels ta tìm được phương án cực biên như bảng 3.5.

Bảng 3.5

T \ P	30	20	25	35	40	
30	13	7	6	2	12	4,4x
20	5	1	10	5	11	4x
40	10	5	3	7	14	2,4,3,7
60	6	3	2	11	10	1,4,4,1
	1,4,4x	2x	1,1,1x	3,5,4,7	1,2,4,4	x

Phương án cực biên tìm được theo phương pháp Fogels:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 5 & 10 \\ 30 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

2.2. Tiêu chuẩn tối ưu cho một phương án của bài toán vận tải cân bằng thu phát

2.2.1. Bài toán đối ngẫu của bài toán vận tải

Xét bài toán vận tải :

$$f(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (3.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, (i = \overline{1, m}) \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, (j = \overline{1, n}) \quad (3.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}). \quad (3.4)$$

Ký hiệu u_i là các biến đối ngẫu ứng với hệ ràng buộc (3.2), v_j là các biến đối ngẫu ứng với hệ ràng buộc (3.3). Khi đó bài toán đối ngẫu của bài toán vận tải có dạng:

$$\sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \rightarrow \max \quad (3.9)$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}). \quad (3.10)$$

Các cặp điều kiện đối ngẫu:

$$x_{ij} \geq 0 \Leftrightarrow u_i + v_j \leq c_{ij} \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}) \quad (3.11)$$

2.2.2. Tiêu chuẩn tối ưu cho một phương án của bài toán vận tải

Định lý 3.5. Giả sử $X = (x_{ij})_{m,n}$ là phương án của bài toán vận tải cân bằng thu phát (3.1) (3.2) (3.3) (3.4). Khi đó điều kiện cần và đủ để phương án X là phương án tối ưu là tồn tại một hệ thống gồm $m + n$ thế vị $(u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n) = (U, V)$ sao cho:

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}), \quad (3.12)$$

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{nếu } x_{ij} > 0. \quad (3.13)$$

Chứng minh. Cần: Giả sử $X = (x_{ij})_{m,n}$ là phương án tối ưu của bài toán vận tải cân bằng thu phát (3.1) (3.2) (3.3) (3.4). Theo định lý đối ngẫu thứ nhất, bài toán đối ngẫu (3.9) (3.10) cũng có phương án tối ưu. Giả sử phương án tối ưu đó là $(U, V) = (u_i, v_j), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. Khi đó điều kiện (3.12) được thỏa mãn. Mặt khác theo định lý đối ngẫu thứ hai giữa (U, V) và X thì điều kiện (3.13) được thỏa mãn. Vậy phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu (U, V) chính là hệ thống thế vị phải tìm.

Đủ: Giả sử tìm được hệ thống thế vị $(U, V) = \{(u_i, v_j): i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$ thỏa mãn (3.12) (3.13). Vì thỏa mãn (3.12) nên (U, V) là phương án của bài toán đối ngẫu. Vì thỏa mãn (3.13) nên cặp phương án $X, (U, V)$ thỏa mãn giả thiết của định lý đối ngẫu thứ hai. Vậy X là phương án tối ưu của bài toán vận tải và hệ thống thế vị (U, V) là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

2.2.3. Phương pháp xây hệ thống toán thế vị

Giả sử $X_0 = (x_{ij}^0)_{m,n}$ là một phương án cực biên và J_0 là một hệ thống ô chọn cơ sở của X_0 . Ta sẽ xây dựng hệ thống thế vị $(U, V) = (u_i, v_j), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. Lấy (3.13) làm điều kiện xuất phát để tìm hệ thống thế vị sau đó sẽ kiểm tra điều kiện (3.12). Xét hệ phương trình tuyến tính:

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad (i, j) \in J_0. \quad (3.14)$$

Vì J_0 gồm $m + n - 1$ ô không chứa vòng nên hệ (3.14) gồm $m + n - 1$ phương trình độc lập tuyến tính, xác định $m + n$ ẩn. Do vậy hệ (3.14) có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số. Lấy bất kỳ một ẩn làm tham số, và cho tham số nhận một giá trị cụ thể, chẳng hạn là số 0, ta được một nghiệm riêng của hệ phương trình. Đó chính là hệ thống thế vị đối với tập ô cơ sở J_0 .

Định lý 2. Giả sử (U, V) và (U', V') là hai nghiệm riêng của hệ (3.14) khi đó ta có:

$$u_i + v_j = u_i' + v_j', \quad \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Từ kết quả của định lý ta nhận thấy việc phương án X_0 có tối ưu hay không nghĩa là hệ thống thế vị (U, V) tìm được có thỏa mãn điều kiện (3.12) hay không, nó hoàn toàn không phụ thuộc vào việc ta chọn ẩn tự do và cho nó giá trị là bao nhiêu khi đi tìm nghiệm riêng của hệ phương trình (3.14).

Tóm lại, để tìm hệ thống thế vị ứng với một phương án cực biên X_0 cho trước và kiểm tra X_0 đã tối ưu chưa ta thực hiện các bước sau:

- Xác định hệ ô chọn cơ sở của X_0 . Nếu X_0 không suy biến thì $J_0 = C(X_0)$. Nếu X_0 suy biến thì ta cần bổ sung thêm một số ô loại (làm ô chọn giả) để cùng với tập $C(X_0)$ tạo thành $m + n - 1$ ô không chứa vòng. Lượng hàng tại các ô chọn giả là 0.

- Tìm một hệ thống thế vị, hay là tìm một nghiệm riêng của hệ (3.14).

Đặt $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$, Δ_{ij} được gọi là số kiểm tra hay ước lượng của ô (i, j) .

Rõ ràng $\Delta_{ij} = 0 \forall (i, j) \in J$ và

- nếu $\Delta_{ij} \leq 0 \forall (i, j)$ thì X_0 là phương án tối ưu,

- nếu tồn tại $\Delta_{ij} > 0$ thì X_0 chưa phải là phương án tối ưu.

2.3. Phương pháp cải tiến phương án

Bổ đề 3.1. Xét phương án cực biên X_0 với hệ ô chọn cơ sở J_0 . Giả sử (i_0, j_0) là một ô bất kỳ không thuộc J_0 , khi đó tập hợp $\{J_0 + (i_0, j_0)\}$ sẽ chứa một vòng duy nhất.

Chứng minh: Do $\{J + (i_0, j_0)\}$ gồm $m + n$ ô nên nó chứa một vòng V nào đó và hiển nhiên V đi qua (i_0, j_0) , Giả sử vòng V có dạng:

$$V = \{(i_0, j_0), (i_0, j_1), (i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k), (i_k, j_0)\}.$$

Giả sử tồn tại vòng $V' \neq V$, dĩ nhiên V' cũng đi qua (i_0, j_0) và giả sử V' có dạng:

$$V' = \{(i_0, j_0), (i_0, q_1), (p_1, q_1), \dots, (p_k, q_k), (p_k, j_0)\}.$$

Từ V và V' ta lập vòng mới:

$$V'' = \{(i_0, j_1), (i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k), (i_k, j_0), (p_k, j_0), (p_k, q_k), \dots, (i_0, q_1)\}.$$

Vòng này không đi qua (i_0, j_0) , trái với giả thiết J_0 không chứa vòng. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bổ đề 3.2. Gọi V là vòng duy nhất tạo bởi (i_0, j_0) và một số ô của J_0 . Đánh số thứ tự 1, 2, 3, ... các ô trên V bắt đầu từ (i_0, j_0) .

Ký hiệu: $V_c = \{(i, j) \in V \text{ có số thứ tự chẵn}\}$,

$V_l = \{(i, j) \in V \text{ có số thứ tự lẻ}\}$.

Ta có công thức $\sum_{(i,j) \in V_c} c_{ij} - \sum_{(i,j) \in V_l} c_{ij} = \Delta_{i_0 j_0}$.

Chứng minh: Giả sử $V = \{(i_0, j_0), (i_0, j_1), (i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k), (i_k, j_0)\}$. Khi đó:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in V_c} c_{ij} - \sum_{(i,j) \in V_l} c_{ij} &= -c_{i_0 j_0} + c_{i_0 j_1} - c_{i_1 j_1} + \dots - c_{i_k j_k} + c_{i_k j_0} \\ &= -c_{i_0 j_0} + u_{i_0} + v_{j_1} - u_{i_1} - v_{j_1} + \dots - u_{i_k} - v_{j_k} + u_{i_k} + v_{j_0} \\ &= -c_{i_0 j_0} + u_{i_0} + v_{j_0} = \Delta_{i_0 j_0}. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Dựa vào hai kết quả trên ta đưa ra thuật toán cải tiến phương án như sau:

Giả sử phương án cực biên X_0 với hệ ô chọn cơ sở J_0 chưa thỏa mãn tiêu chuẩn tối ưu, nghĩa là còn tồn tại số kiểm tra $\Delta_{ij} > 0$.

- Chọn ô điều chỉnh (thường chọn ô có số kiểm tra dương lớn nhất). Giả sử $\Delta_{i_0 j_0} = \max\{\Delta_{ij} > 0\}$, khi đó ô (i_0, j_0) là ô điều chỉnh.

- Lập vòng điều chỉnh V tạo bởi (i_0, j_0) và một số ô chọn khác của J_0 . Sau đó đánh số thứ tự và chia V thành V_c, V_l .

- Xác định phương án mới X_1 theo công thức:

$$x_{ij}^1 = \begin{cases} x_{ij}^0 & (ij) \notin V \\ x_{ij}^0 - q & (ij) \in V_c \\ x_{ij}^0 + q & (ij) \in V_l \end{cases} \quad (3.15)$$

với q là lượng điều chỉnh được xác định theo công thức:

$$q = \min\{x_{ij}^0 : (ij) \in V_c\} = x_{i_r j_r}^0. \quad (3.16)$$

Định lý 3.7. *Giả sử X_0 là phương án cực biên không suy biến, ma trận X_1 được xác định theo công thức (3.15) (3.16) là một phương án cực biên với hệ ô chọn cơ sở $J_0 = J \cup \{i_0, j_0\} \setminus \{i_r, j_r\}$, và tốt hơn hẳn X_0 .*

Chứng minh: Vì số ô của vòng V nằm trên một dòng hay một cột bằng 0 hoặc là một số chẵn nên từ công thức (3.15) ta có:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^1 = \sum_{j=1}^n x_{ij}^0 = a_i, \forall i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij}^1 = \sum_{i=1}^m x_{ij}^0 = b_j, \forall j = \overline{1, m}.$$

Vì X_0 là phương án cực biên không suy biến nên $x_{ij}^0 > 0$ với mọi $(i, j) \in J_0$. Do vậy $q > 0$, mặt khác theo (3.15) và (3.16) thì $x_{ij}^1 \geq 0, \forall (i, j)$. Như vậy chứng tỏ X_1 là phương án của bài toán. Tập hợp J_1 vẫn đảm bảo $m + n - 1$ ô chọn và không chứa vòng. Vậy phương án X_1 thu được là phương án cực biên với cơ sở J_1 , đồng thời $f(X_0) - f(X_1) = q\Delta_{i_0 j_0} > 0$, chứng tỏ phương án X_1 tốt hơn phương án X_0 .

Thuật toán thế vị giải bài toán vận tải cân bằng thu phát (bài toán không suy biến) gồm các bước sau:

Bước 1: Tìm phương án cực biên xuất phát X_0 và hệ ô chọn cơ sở J_0 .

Bước 2: Xây dựng hệ thống thế vị, kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu.

+ Nếu thỏa mãn tiêu chuẩn tối ưu, kết luận bài toán;

+ Nếu chưa thỏa mãn tiêu chuẩn tối ưu, chuyển sang bước 3.

Bước 3: Cải tiến phương án:

- Chọn ô điều chỉnh, lập vòng điều chỉnh, xác định lượng điều chỉnh q .

- Xác định phương án cực biên mới X_1 : Giữ nguyên lượng hàng tại các ô không nằm trên vòng điều chỉnh V . Trên vòng điều chỉnh V ta thêm lượng hàng q ở các ô lẻ, bớt đi lượng hàng q ở các ô chẵn đồng thời xác định hệ ô chọn cơ sở mới J_1 .

Gán $X_1 := X_0$, quay về bước 2.

Chú ý rằng, do số phương án cực biên là hữu hạn nên thuật toán thế vị cũng sẽ kết thúc sau một số hữu hạn bước.

Ví dụ 3.3: Tìm phương án tối ưu của bài toán vận tải cân bằng thu phát cho ở bảng 3.6.

	T				
P		30	25	40	25

20	4	2	10	6
45	1	3	8	12
55	5	3	9	7

Bảng 3.6

Giải: - Bằng phương pháp cước phí bé nhất, ta tìm được phương án cực biên xuất phát X_0 như bảng 3.7.

Bảng 3.7

T	30	25	40	25
P				
20	4	2	10	6
45	1	3	8	12
55	5	3	9	7

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 \\ 30 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 25 \end{pmatrix}$$

Phương án cực biên X_0 có cơ sở J_0 là tập các ô chọn.

Bảng 3.8

4	2	10	6	$u_1 = 0$
-	20	-	-	
1	3	8	12	$u_2 = 1$
30	5	10	-	
5	3	9	7	$u_3 = 2$
-	(1)	30	25	
$v_1 = 0$	$V_2 = 2$	$v_3 = 7$	$v_4 = 5$	

- Xây dựng hệ thống thế vị: từ công thức $u_i + v_j = c_{ij} \forall (i, j) \in J_0$, cho $u_1 = 0$, ta được hệ thống thế vị như ở bảng 3.8.

- Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: tính $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ đối với các ô loại, thấy ô (3.2) vi phạm tiêu chuẩn tối ưu.

- Điều chỉnh phương án: lấy ô (3.2) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh $V = \{(3, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$.

$$\Rightarrow q = \min\{5, 30\} = 5.$$

Điều chỉnh 5 đơn vị hàng từ ô thuộc V_c sang ô thuộc V_l , ta được phương án cực biên X_1 như bảng 3.9: khi đó ô (2, 2) hết hàng trở thành ô loại, ô (3, 2) có hàng trở thành ô chọn. Ta có cơ sở mới J_1 là tập các ô chọn như bảng 3.9.

Bảng 3.9

4	2	10	6	$u_1 = -1$
-	20	-	(0)	
1	3	8	12	$u_2 = -1$
30	-	15	-	
5	3	9	7	$u_3 = 0$
-	5	25	25	
$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$V_3 = 9$	$v_4 = 7$	

- Xây dựng hệ thống thế vị: từ công thức $u_i + v_j = c_{ij} \forall (i, j) \in J_1$, cho $u_3 = 0$, ta được hệ thống thế vị như ở bảng 3.9.

Tính Δ_{ij} , ta thấy $\Delta_{ij} \leq 0, \forall (i, j)$. Vậy phương án cực biên X_1 là phương án tối ưu của bài toán.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 5 & 25 & 25 \end{pmatrix},$$

tổng cước phí vận chuyển nhỏ nhất là:

$$f(x) = 2.20 + 1.30 + 8.15 + 3.5 + 9.25 + 7.25 = 605.$$

Chú ý: Nếu gặp trường hợp phương án cực biên suy biến thì q có thể bằng 0. Khi $q = 0$, ta vẫn tiến hành thuật toán bình thường. Thực chất của quá trình này là thay đổi một ô cơ sở thành một ô không thuộc cơ sở, còn ô điều chỉnh sẽ trở thành ô cơ sở. Kết quả của quá trình là chuyển từ tập ô cơ sở này sang tập ô cơ sở khác mà không làm thay đổi phương án cực biên.

Nếu $q = \min_{(i,j) \in V_c} \{x_{ij}\}$ đạt tại nhiều ô khác nhau, đó là dấu hiệu của phương án

cực biên suy biến. Ta loại một ô bất kỳ một cách ngẫu nhiên trong các ô đó, các ô khác giữ nguyên trong tập cơ sở mới (chúng có vai trò như ô bổ sung).

Ví dụ 3.4: Cho bài toán vận tải như bảng 3.10.

Bảng 3.10

T \ P	51	54	60	45	80
50	10	11	10	9	8
90	12	12	5	13	11
70	19	18	6	14	15
80	18	17	7	15	12

Tìm phương án vận chuyển tối ưu.

Giải: - Tìm phương án cực biên xuất phát: Dùng phương pháp Fogels, ta thu được phương án cực biên X_0 như bảng 3.11.

Bảng 3.11

T \ P	51	54	60	45	80	
50	10 5	11	10	9 45	8	1,1,2,1x
90	12 46	12 44	5	13	11	6,1,1,0
70	19	18 10	6 60	14	15 0	8,1,3,1
80	18	17	7	15	12 80	5,3,5x
	2,2,7x	1,1,6	1x	4x	3x	

- Xác định tập ô cơ sở: phương án cực biên xuất phát có 7 ô chọn, thiếu một ô so với hạng của bài toán. Ta bổ sung thêm ô (3,5) để đủ 8 ô không chứa vòng. Khi đó ta có tập ô cơ sở $J_0 = \{(1, 1), (1, 4), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3), (3,5), (4, 5)\}$.

Bảng 3.12

10	11	10	9	8	$u_1 = -8$
5	-	-	45	-	
12	12	5	13	11	$u_2 = -6$
46	44	-	-	-	
19	18	6	14	15	$u_3 = 0$
-	10	60	(3)	0	
18	17	7	15	12	$u_4 = -3$
-	-	-	-	80	
$v_1 = 18$	$V_2 = 18$	$v_3 = 6$	$v_4 = 17$	$v_5 = 15$	

- Xây dựng hệ thống thế vị: dùng công thức $u_i + v_j = c_{ij}, \forall (i, j) \in J_0$, ta được hệ thống thế vị như bảng 3.12.

- Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: tính $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$, ta thấy ô (3, 4) vi phạm tiêu chuẩn tối ưu.

- Điều chỉnh phương án: Lấy ô (3,4) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh $V = \{(3, 4), (1, 4), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$.

$$\Rightarrow q = \min\{45, 46, 10\} = 10.$$

Điều chỉnh 10 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên X_1 : Khi đó ô (3, 2) hết hàng trở thành ô loại, ô (3, 4) có hàng trở thành ô chọn, ta có hệ ô chọn cơ sở J_1 .

Bảng 3.13

10	11	10	9	8	$u_1 = -5$
15	-	-	35	(2)	
12	12	5	13	11	$u_2 = -3$
36	54	-	-	(1)	
19	18	6	14	15	$u_3 = 0$
-	-	60	10	0	
18	17	7	15	12	$u_4 = -3$
-	-	-	-	80	
$v_1 = 15$	$V_2 = 15$	$v_3 = 6$	$v_4 = 14$	$v_5 = 15$	

- Xây dựng hệ thống thế vị: dùng công thức $u_i + v_j = c_{ij}, \forall (i, j) \in J_1$, ta được hệ thống thế vị như bảng 3.13.

- Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: tính $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$, ta thấy ô (1, 5) và ô (2, 5) vi phạm tiêu chuẩn tối ưu.

- Điều chỉnh phương án: Lấy ô (1, 5) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh $V = \{(1,5), (3, 5), (3, 4), (1, 4)\}$.

$$\Rightarrow q = \min\{35, 0\} = 0.$$

Điều chỉnh 0 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên X_2 : khi đó ô (3, 5) trở thành ô loại, ô (1, 5) trở thành ô chọn, ta có hệ ô chọn cơ sở J_2 .

Bảng 3.14

10	11	10	9	8	$u_1 = -5$
15	-	-	35	0	
12	12	5	13	11	$u_2 = -3$
36	54	-	-	-	
19	18	6	14	15	$u_3 = 0$
-	-	60	10	-	
18	17	7	15	12	$u_4 = -1$
-	-	-	-	80	
$v_1 = 15$	$v_2 = 15$	$v_3 = 6$	$v_4 = 14$	$v_5 = 13$	

- Xây dựng hệ thống thế vị: dùng công thức $u_i + v_j = c_{ij}, \forall (i, j) \in J_2$, ta được hệ thống thế vị như bảng 3.14.

- Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: $\Delta_{ij} \leq 0, \forall (i, j)$. Vậy phương án cực biên X_2 là phương án tối ưu:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 35 & 0 \\ 36 & 54 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 80 \end{pmatrix}$$

Khi đó tổng cước phí vận chuyển nhỏ nhất là:

$$f(X_2) = 10.15 + 9.35 + 12.36 + 12.54 + 6.60 + 14.10 + 12.80 = 3005.$$

3. BÀI TOÁN VẬN TẢI KHÔNG CÂN BẰNG THU PHÁT

3.1. Phát lớn hơn thu: $(\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j)$

Khi vận chuyển xong cho các trạm thu thì các trạm phát còn tồn kho một lượng hàng tổng cộng là $\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$. Bài toán đặt ra nên để trạm phát nào phải chịu tồn kho và tồn bao nhiêu thì tổng chi phí vận chuyển sẽ thấp nhất.

Để giải quyết bài toán này, ta lập thêm trạm thu thứ $n + 1$ (gọi là trạm thu giả) với nhu cầu nhận về là $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$, cước phí từ các trạm phát đến các trạm thu giả là $c_{i, n+1} = 0, \forall i = \overline{1, m}$. Khi đó ta được bài toán vận tải cân bằng thu phát, tìm phương án tối ưu cho bài toán cân bằng này, từ đó suy ra phương án tối ưu của bài toán gốc: trạm phát nào phân hàng cho trạm thu giả thì trạm phát đó phải chịu tồn hàng.

Chú ý rằng, khi giải bài toán trên nếu dùng phương pháp cước phí bé nhất để tìm phương án cực biên xuất phát ta ưu tiên phân phối hàng tối đa vào các ô có cước phí dương bé nhất trước, rồi cuối cùng mới đến các ô có cước phí bằng 0.

Ví dụ 3.5: Tìm phương án vận chuyển tối ưu của bài toán vận tải (Bảng 3.15).

Bảng 3.15

T \ P	25	35	42	53
45	4	8	7	6
38	10	12	3	9
57	7	5	4	12
20	11	1	5	8

Giải: - Kiểm tra điều kiện cân bằng thu phát: $\sum_{i=1}^m a_i = 160, \sum_{j=1}^n b_j = 155$, như vậy phát lớn hơn thu. Ta lập thêm trạm thu giả B_4 với nhu cầu nhận về tương trưng là:

$b_5 = \sum_{i=1}^4 a_i - \sum_{j=1}^4 b_j = 160 - 155 = 5$ đơn vị hàng, cước phí $c_{i5} = 0, \forall i = \overline{1,4}$. Khi đó

ta được bài toán vận tải cân bằng thu phát như bảng 3.16.

Bảng 3.16

$\begin{matrix} T \\ P \end{matrix}$	25	35	42	53	5
45	4	8	7	6	0
38	10	12	3	9	0
57	7	5	4	12	0
20	11	1	5	8	0

- Tìm phương án cực biên xuất phát: Dùng phương pháp cước phí bé nhất, ta thu được phương án cực biên X_0 như bảng 3.17.

Bảng 3.17

$\begin{matrix} T \\ P \end{matrix}$	25	35	42	53	5
45	4 25	8	7	6 20	0
38	10	12	3 38	9	0
57	7	5 15	4 4	12 33	0 5
20	11	1 20	5	8	0

Tập ô cơ sở J_0 là tập các ô chọn như bảng trên.

Bảng 3.18

4	8	7	6	0	$u_1 = -6$
25	-	-	20	-	
10	12	3	9	0	$u_2 = -1$
-	-	38	(2)	-	
7	5	4	12	0	$u_3 = 0$
(3)	15	4	33	5	
11	1	5	8	0	$u_4 = -4$
-	20	-	(0)	-	
$v_1=10$	$v_2=5$	$V_3=4$	$V_4=12$	$v_5=0$	

- Xây dựng hệ thống thế vị: dùng công thức $u_i + v_j = c_{ij}, \forall (i, j) \in J_0$, ta được hệ thống thế vị như bảng 3.18.

- Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: tính $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$, ta thấy ô (3, 1) vi phạm tiêu chuẩn tối ưu.

- Điều chỉnh phương án: Lấy ô (3,1) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh $V = \{(3, 1), (1, 1), (1, 4), (3, 4)\}$.

$$\Rightarrow q = \min\{25, 33\} = 25.$$

Điều chỉnh 25 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên X_1 : Khi đó ô (1, 1) hết hàng trở thành ô loại, ô (3, 1) có hàng trở thành ô chọn, ta có hệ ô chọn cơ sở J_1 .

Bảng 3.19

4	8	7	6	0	$u_1 = -6$
-	-	-	45	-	
10	12	3	9	0	$u_2 = -1$
-	-	38	(2)	-	
7	5	4	12	0	$u_3 = 0$
25	15	4	8	5	
11	1	5	8	0	$u_4 = -4$
-	20	-	(0)	-	
$V_1=7$	$v_2=5$	$V_3=4$	$V_4=12$	$v_5=0$	

- Xây dựng hệ thống thế vị: dùng công thức $u_i + v_j = c_{ij}, \forall (i, j) \in J_1$, ta được hệ thống thế vị như bảng 3.19.

- Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: tính $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$, ta thấy ô (2, 4) vi phạm tiêu chuẩn tối ưu.

- Điều chỉnh phương án: Lấy ô (2, 4) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh $V = \{(2, 4), (3, 4), (3, 3), (2, 3)\}$.

$$\Rightarrow q = \min\{8, 38\} = 8.$$

Điều chỉnh 8 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên X_2 : Khi đó ô (3, 4) hết hàng trở thành ô loại, ô (2, 4) có hàng trở thành ô chọn, ta có hệ ô chọn cơ sở J_2 .

Bảng 3.20

4	8	7	6	0	$u_1 = -4$
-	-	-	45	-	
10	12	3	9	0	$u_2 = -1$
-	-	30	8	-	
7	5	4	12	0	$u_3 = 0$
25	15	12	-	5	
11	1	5	8	0	$u_4 = -4$
-	20	-	-	-	
$V_1=7$	$v_2=5$	$V_3=4$	$v_4=10$	$v_5=0$	

- Xây dựng hệ thống thế vị: dùng công thức $u_i + v_j = c_{ij}, \forall (i, j) \in J_2$, ta được hệ thống thế vị như bảng 3.20.

- Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: $\Delta_{ij} \leq 0, \forall (i, j)$. Vậy phương án cực biên X_2 là phương án tối ưu:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 8 & 0 \\ 25 & 15 & 12 & 0 & 5 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Phương án tối ưu của bài toán gốc là:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 30 & 8 \\ 25 & 15 & 12 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

theo phương án này trạm phát A_3 phải chịu tổn kho 5 đơn vị hàng. khi đó chi phí vận chuyển nhỏ nhất là: $f(X) = 6.45 + 3.30 + 9.8 + 7.25 + 5.15 + 4.12 + 1.20 = 750$.

3.2. Phát ít hơn thu: $(\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j)$

Khi vận chuyển hết hàng từ các trạm phát đến các trạm thu theo nhu cầu của các trạm thu, thì các trạm thu còn thiếu so với nhu cầu một lượng hàng tổng cộng là $\sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$. Bài toán đặt ra nên để trạm thu nào phải chịu thiếu hàng và thiếu bao nhiêu thì tổng chi phí vận chuyển sẽ thấp nhất.

Để giải quyết bài toán này, ta lập thêm trạm phát A_{m+1} thứ $m+1$ (gọi là trạm phát giả) với lượng hàng cần chuyển đi là $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$, cước phí từ

các trạm phát giả đến các trạm thu là $c_{m+1j} = 0, \forall j = \overline{1, n}$. Khi đó ta được bài toán vận tải cân bằng thu phát, tìm phương án tối ưu cho bài toán cân bằng này, từ đó suy ra phương án tối ưu của bài toán gốc: trạm thu nào nhận hàng của trạm phát giả thì trạm thu đó phải chịu thiếu hàng.

Ví dụ 3.6: Cho bài toán vận tải

Bảng 3.21

	110	90	110
80	15	17	14
60	12	10	11
100	20	16	21

- Viết dạng toán học của bài toán.
- Tìm phương án vận chuyển tối ưu.

Giải: a. Kiểm tra điều kiện cân bằng thu phát: $\sum_{i=1}^m a_i = 240$, $\sum_{j=1}^n b_j = 310$, như vậy phát ít hơn thu, do đó các trạm phát tiêu thụ hết hàng, các trạm thu phải chịu thiếu hàng.

Gọi x_{ij} là lượng hàng từ trạm phát A_i , đến trạm thu B_j ($i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$). Khi đó ta có mô hình toán học như sau:

Tìm ma trận $X = (x_{ij})_{3 \times 3}$ sao cho:

$$f(X) = 15x_{11} + 17x_{12} + 14x_{13} + 12x_{21} + 10x_{22} + 11x_{23} + 20x_{31} + 16x_{32} + 21x_{33} \rightarrow \min.$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 80$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 60$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 100$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 110$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{32} \leq 90$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 110$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$$

- Ta lập thêm trạm phát giả A_4 với lượng hàng tương trưng cần chuyển đi là:

$$a_4 = \sum_{j=1}^3 b_j - \sum_{i=1}^3 a_i = 310 - 270 = 70 \text{ đơn vị hàng, cước phí } c_{4j} = 0, \forall j = \overline{1,3}. \text{ Khi đó}$$

ta được bài toán vận tải cân bằng thu phát trong bảng 3.22.

Bảng 3.22

P \ T	110	90	110
80	15	17	14
60	12	10	11
100	20	16	21
70	0	0	0

- Bằng phương pháp cước phí bé nhất, ta tìm được phương án cực biên xuất phát X_0 như bảng sau, phương án cực biên X_0 có cơ sở J_0 là tập các ô chọn.

Bảng 3.23

P \ T	110	90	110
80	15	17	14
60	12	10	11
100	20	16	21
70	0	0	0

- Xây dựng hệ thống thế vị: dùng công thức $u_i + v_j = c_{ij} \forall (i, j) \in J_0$, ta thu được hệ thống thế vị như ở bảng 3.24.

Bảng 3.24

15	17	14		$u_1 = 14$
-	-		80	
12	10	11		$u_2 = 14$
(2)		60	(3)	
20	16	21		$u_3 = 20$
	70	30	-	
0	0	0		$u_4 = 0$
	40	-	30	
$v_1 = 0$	$v_2 = -4$	$v_3 = 0$		

- Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: tính $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ đối với các ô loại, thấy ô (2, 1) và (2, 3) vi phạm tiêu chuẩn tối ưu.

- Điều chỉnh phương án: lấy ô (2, 3) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh $V = \{(2, 3), (2, 2), (3, 2), (3, 1), (4, 1), (4, 3)\}$.

$$\Rightarrow q = \min\{60, 70, 30\} = 30.$$

Điều chỉnh 30 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên X_1 : khi đó ô (3, 4) hết hàng trở thành ô loại, ô (2, 3) có hàng trở thành ô chọn, đồng thời ta có cơ sở mới J_1 .

Bảng 3.25

15	17	14		$u_1 = 17$
(2)	-		80	
12	10	11		$u_2 = 14$
(2)		30	30	
20	16	21		$u_3 = 20$
	40	60	-	
0	0	0		$u_4 = 0$
	70	-	-	
$v_1 = 0$	$v_2 = -4$	$v_3 = -3$		

Xây dựng hệ thống thế vị, như bảng trên và kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu, ta nhận thấy ô (1, 1) và ô (2, 1) vi phạm.

Lấy ô (2, 1) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh:

$$V = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (2, 2)\}.$$

Lượng hàng điều chỉnh là $q = \min\{30, 40\} = 30$.

Điều chỉnh 30 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên thứ X_2 như bảng 3.26.

Bảng 3.26

15 (0)	17 -	14 80	$u_1 = 15$
12 30	10 -	11 30	$u_2 = 12$
20 10	16 90	21 -	$u_3 = 20$
0 70	0 -	0 -	$u_4 = 0$
$v_1 = 0$	$v_2 = -4$	$v_3 = -1$	

Xây dựng hệ thống thế vị, kiểm tra thấy $\Delta_{ij} \leq 0, \forall(i, j)$. Vậy phương án cực biên thứ X_2 là phương án tối ưu của bài toán cân bằng thu phát.

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 80 \\ 30 & 0 & 30 \\ 10 & 90 & 0 \\ 70 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy phương án tối ưu của bài toán gốc là:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 80 \\ 30 & 0 & 30 \\ 10 & 90 & 0 \end{pmatrix}.$$

Theo phương án này thì trạm thu B_1 phải chịu thiếu 70 đơn vị hàng và tổng chi phí vận chuyển nhỏ nhất là:

$$f(X) = 14.80 + 12.30 + 11.30 + 20.10 + 16.90 = 3450.$$

4. BÀI TOÁN PHÂN PHỐI

4.1. Định nghĩa. Bài toán phân phối là bài toán quy hoạch tuyến tính có hệ ràng buộc giống như hệ ràng buộc của bài toán vận tải nhưng với yêu cầu làm cực đại hàm mục tiêu. Dạng toán học

$$f(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = (\leq) a_i, (i = \overline{1, m})$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = (\leq) b_j, (j = \overline{1, n})$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}).$$

$$c_{ij} \geq 0; a_i > 0; b_j > 0, \forall i, j.$$

Trong bài toán phân phối, ta sử dụng thuật ngữ “*năng suất*” thay cho thuật ngữ “*cước phí*”, thuật ngữ “*tổng thu nhập*” thay cho thuật ngữ “*tổng chi phí*”.

4.2. Phương pháp giải

Để tìm phương án tối ưu cho bài toán phân phối ta vẫn sử dụng phương pháp thế vị. Tuy nhiên vẫn có những điểm khác so với bài toán min.

+ Kiểm tra điều kiện cân bằng.

+ Tìm phương án cực biên xuất phát:

- Phương pháp “*năng suất cao nhất*”: Trên bảng năng suất, tìm ô có năng suất cao nhất và phân vào ô đó lượng hàng lớn nhất có thể được. Khi đó có ít nhất một dòng hay một cột chứa ô đó thỏa mãn nhu cầu. Xoá bỏ dòng hay cột đó và lặp lại thuật toán cho các ô còn lại, sau một số hữu hạn bước ta tìm được phương án cực biên của bài toán.

- Phương pháp Fogels: Tính chênh lệch năng suất giữa hai ô có năng suất cao nhất của mỗi dòng và mỗi cột. Ưu tiên phân hàng cho dòng hay cột có chênh lệch cao nhất vào ô có năng suất cao nhất một lượng hàng lớn nhất có thể được, khi đó có ít nhất một dòng hay cột thỏa mãn nhu cầu. Xoá bỏ dòng hay cột đó, lặp

lại thuật toán trên sau một số hữu hạn bước ta thu được phương án cực biên của bài toán.

+ Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: tiêu chuẩn tối ưu của bài toán phân phối là:

$$\Delta_{ij} \geq 0, \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

+ Tìm hệ thống thế vị và kiểm tra tính tối ưu cho phương án giống như bài toán min.

+ Điều chỉnh phương án: Nếu phải cải tiến phương án thì ô điều chỉnh là:

$$\Delta_{ij} = \min\{\Delta_{ij} < 0\}.$$

Ví dụ 3.7: Tìm phương án vận chuyển tối ưu của bài toán phân phối.

Bảng 3.27

$\begin{matrix} T \\ P \end{matrix}$	100	200	150	140
150	17	19	14	12
200	23	15	16	10
200	18	20	19	19
150	24	19	13	18

Giải: - Kiểm tra điều kiện cân bằng thu phát: $\sum_{i=1}^m a_i = 700, \sum_{j=1}^n b_j = 590$, như vậy

phát lớn hơn thu. Ta lập thêm trạm thu giả B_5 với nhu cầu nhận về tương trưng là:

$$b_5 = \sum_{i=1}^4 a_i - \sum_{j=1}^4 b_j = 700 - 590 = 110 \text{ đơn vị hàng, cước phí } c_{i5} = 0, \forall i = \overline{1, 4}. \text{ Khi}$$

đó ta được bài toán vận tải cân bằng thu phát sau:

Bảng 3.28

P \ T	100	200	150	140	110
150	17	19	14	12	0
200	23	15	16	10	0
200	18	20	19	19	0
150	24	19	13	18	0

- Tìm phương án cực biên xuất phát: Dùng phương pháp Fogels, ta thu được phương án cực biên như bảng 3.29.

Bảng 3.29

P \ T	100	200	150	140	110	
150	17	19	14	12	0	2,5x
200	23	15	16	10	0	7,1,5
200	18	20	19	19	0	1,1,1
150	24	19	13	18	0	5,1,1
	1x	1,1x	3,3x	1,1		

Phương án cực biên X_0 có hệ ô chọn cơ sở J_0 .

- Xây dựng hệ thống thế vị: dùng công thức $u_i + v_j = c_{ij}, \forall (i, j) \in J_0$, ta được hệ thống thế vị như bảng 3.30.

Bảng 3.30

17 +	19 150	14 +	12 +	0 +	$u_1 = 4$
23 100	15 50	16 +	10 +	0 50	$u_1 = 0$
18 +	20 (-4)	19 150	19 50	0 +	$u_1 = 1$
24 (-1)	19 (-4)	13 +	18 90	0 60	$u_1 = 0$
$v_1=23$	$v_2=15$	$v_3=18$	$v_4=18$	$v_5=0$	

- Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: tính $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$, ta thấy ô (3,2), (4, 1) và (4, 2) vi phạm tiêu chuẩn tối ưu.

- Điều chỉnh phương án: Lấy ô (4, 2) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh $V = \{(4, 2), (2, 2), (2, 5), (4, 5)\}$.

$$\Rightarrow q = \min\{50, 60\} = 50.$$

Điều chỉnh 50 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên X_1 : Khi đó ô (2, 2) hết hàng trở thành ô loại, ô (4, 2) có hàng trở thành ô chọn, ta có hệ ô chọn cơ sở J_1 .

Bảng 3.31

17 +	19 150	14 +	12 +	0 +	$u_1 = 0$
23 100	15 +	16 +	10 +	0 100	$u_2 = 0$
18 +	20 +	19 150	19 50	0 +	$u_3 = 1$
24 (-1)	19 50	13 +	18 90	0 10	$u_4 = 0$
$V_1=23$	$v_2=19$	$v_3=18$	$v_4=18$	$v_5=0$	

- Xây dựng hệ thống thế vị: dùng công thức $u_i + v_j = c_{ij}, \forall (i, j) \in J_1$, ta được hệ thống thế vị như bảng 3.32.

- Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: tính $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$, ta thấy ô (4,1) vi phạm tiêu chuẩn tối ưu.

- Điều chỉnh phương án: Lấy ô (4, 1) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh $V = \{(4, 1), (2, 1), (2, 5), (4, 5)\}$.

$$\Rightarrow q = \min\{100, 10\} = 10.$$

Điều chỉnh 10 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên X_2 , và hệ ô chọn cơ sở J_2 .

Bảng 3.32

17 +	19 150	14 +	12 +	0 +	$u_1 = 1$
23 90	15 +	16 +	10 +	0 11	$u_1 = 0$
18 +	20 +	19 150	19 50	0 +	$u_1 = 2$
24 10	19 50	13 +	18 90	0 +	$u_1 = 1$
$v_1=23$	$v_2=18$	$V_3=17$	$v_4=17$	$v_5=0$	

- Xây dựng hệ thống thế vị: dùng công thức $u_i + v_j = c_{ij}, \forall (i, j) \in J_2$, ta được hệ thống thế vị như bảng 3.32.

- Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: $\Delta_{ij} \geq 0, \forall (i, j)$. Vậy phương án cực biên X_2 là phương án tối ưu:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 150 & 0 & 0 & 0 \\ 90 & 0 & 0 & 0 & 110 \\ 0 & 0 & 150 & 50 & 0 \\ 10 & 50 & 0 & 90 & 0 \end{pmatrix}.$$

Phương án tối ưu của bài toán gốc là:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 150 & 0 & 0 \\ 90 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 150 & 50 \\ 10 & 50 & 0 & 90 \end{pmatrix},$$

theo phương án này trạm phát A_2 phải chịu tổn kho 110 đơn vị hàng. Khi đó tổng thu nhập cao nhất là:

$$f(X) = 19.150 + 23.90 + 19.150 + 19.50 + 24.10 + 19.50 + 18.19 = 11530.$$

5. BÀI TOÁN Ô CẮM

Trong thực tế ta thường gặp tình huống trạm thu B_j không thể nhận hàng của trạm phát A_i , khi đó ô (i, j) được gọi là ô cấm. Bài toán vận tải hay bài toán phân phối có thêm yêu cầu trên được gọi là *bài toán ô cấm*. Muốn tìm phương án tối ưu của bài toán vận tải trong điều kiện như trên, ta làm cho cước phí vận chuyển trở nên rất lớn. Khi đó trong phương án vận chuyển tối ưu sẽ không có hàng từ A_i đến B_j . Trên bảng vận tải, ta cho cước phí $c_{ij} = M > 0$ đủ lớn. Còn đối với bài toán phân phối có ô cấm (i, j) thì ta cho năng suất $c_{ij} = -M$, với M là số dương đủ lớn.

Ví dụ 3.8: Cho bài toán vận tải như bảng 3.33, biết rằng trạm phát A_1 phải tiêu thụ hết hàng. Tìm phương án vận chuyển tối ưu.

Bảng 3.33

P \ T	T		
	100	120	90
120	10	9,5	14
120	8,5	8	10
130	12	9	12

Giải: Kiểm tra điều kiện cân bằng thu phát: $\sum_{i=1}^m a_i = 370$, $\sum_{j=1}^n b_j = 310$, như vậy phát

lớn hơn thu, do đó các trạm thu được nhận đủ hàng, các trạm phát phải chịu tổn hàng, nhưng riêng trạm phát A_1 phải được ưu tiên tiêu thụ hết hàng.

Ta lập thêm trạm thu giả B_4 với lượng hàng tương trưng cần nhận về là:

$$b_4 = \sum_{j=1}^3 a_i - \sum_{i=1}^3 b_j = 370 - 310 = 60 \text{ đơn vị hàng, cước phí } c_{i4} = 0, \forall i = \overline{1,3}. \text{ Khi đó}$$

ta được bài toán vận tải cân bằng thu phát trong bảng 3.34.

Bảng 3.34

P \ T	100	120	90	60
120	10	9,5	14	M
120	8,5	8	10	0
130	12	9	12	0

- Bằng phương pháp Fogels, ta tìm được phương án cực biên xuất phát như bảng 3.35.

Bảng 3.35

P \ T	100	120	90	60	
120	10 100	9,5	14	M 20	0,5;4
120	8,5	8	10 90	0 30	0,5;1,5
130	12	9 120	12	0 10	3;0
	1,5x	1x	2x		

- Tập ô cơ sở như bảng trên, ký hiệu tập ô cơ sở là J.

- Xây dựng hệ thống thế vị: dùng công thức $u_i + v_j = c_{ij} \quad \forall (i, j) \in J$, ta thu được hệ thống thế vị như ở bảng 3.36.

Bảng 3.36

10 100	9,5	14	M 20	$u_1 = 0$
8,5	8	10 90	0 30	$u_2 = -M$
12	9 120	12	0 10	$u_3 = -M$
$v_1 = 10$	$v_2 = 9 + M$	$v_3 = 10 + M$	$v_4 = M$	

Bảng 3.37

10	9,5	14	M	$u_1 = 0,5$
100	20			
8,5	8	10	0	$u_2 = 0$
(1)	(1)	90	30	
12	9	12	0	$u_3 = 0$
	100		30	
$v_1=9,5$	$v_2=9$	$v_3=10$	$v_4=0$	

Bảng 3.38

10	9,5	14	M	$u_1 = 9,5$
100	20			
8,5	8	10	0	$u_2 = 8$
	30	90		
12	9	12	0	$u_3 = 9$
	70		60	
$v_1=0,5$	$v_2=0$	$V_3=2$	$v_4=9$	

- Xây dựng hệ thống thế vị: dùng công thức $u_i + v_j = c_{ij}, \forall (i, j) \in J_0$, ta được hệ thống thế vị như bảng 3.38.

Kiểm tra thấy $\Delta_{ij} \leq 0, \forall (i, j)$. Vậy phương án cực biên xuất phát là phương án tối ưu của bài toán cân bằng:

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 90 & 0 \\ 0 & 70 & 0 & 60 \end{pmatrix}$$

Vậy phương án tối ưu của bài toán gốc là: $X_0 = \begin{pmatrix} 100 & 20 & 0 \\ 0 & 30 & 90 \\ 0 & 70 & 0 \end{pmatrix}.$

Theo phương án này thì trạm phát A_3 phải chịu tồn kho 60 đơn vị hàng và tổng chi phí vận chuyển nhỏ nhất là:

$$f(X) = 10.100 + 9,5.20 + 8.30 + 10.90 + 9.70 = 2960.$$

CHƯƠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

I. BÀI TOÁN SẢN XUẤT ĐỒNG BỘ

1. CÁC KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT CỦA BÀI TOÁN SẢN XUẤT ĐỒNG BỘ

1.1. Nội dung kinh tế và mô hình toán học của bài toán sản xuất đồng bộ

1.1.1. Nội dung kinh tế của bài toán sản xuất đồng bộ

Giả sử có m máy công cụ khác nhau tham gia sản xuất một loại sản phẩm gồm n chi tiết khác nhau. Số máy mỗi loại tham gia quá trình sản xuất được giả thiết là một chiếc, số chi tiết mỗi loại cấu thành nên sản phẩm được giả thiết là tỷ lệ với nhau theo tỷ số $1 : 1 : \dots : 1$, do vậy có thể coi số chi tiết mỗi loại cấu thành nên sản phẩm đều là 1. Năng suất máy thứ i sản xuất chi tiết thứ j là a_{ij} (số đơn vị chi tiết/ 1 đơn vị thời gian) với $\forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n}$.

Hãy bố trí thời gian để các máy sản xuất các chi tiết sao cho số sản phẩm đủ bộ (đồng bộ) sản xuất được là nhiều nhất.

1.1.2. Mô hình toán học của bài toán sản xuất đồng bộ

Ta cần tìm tỷ lệ thời gian phân bố cho máy thứ i sản xuất chi tiết thứ j trong một đơn vị thời gian.

Gọi x_{ij} là phần thời gian trong một đơn vị thời gian mà máy thứ i sản xuất chi tiết thứ j , khi đó ta có: $x_{ij} \geq 0, \forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n}$ và $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1, \forall i = \overline{1, m}$.

Số chi tiết j sản xuất được bởi máy i là $a_{ij}x_{ij}, \forall i = \overline{1, m}$, do đó tổng số chi tiết j sản xuất được bởi tất cả các máy là:

$$Z_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij}, \forall j = \overline{1, n}.$$

Số sản phẩm đủ bộ là:

$$Z = \min \{Z_j, j = \overline{1, n}\} = \min \left\{ Z_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij}, \forall j = \overline{1, n} \right\}.$$

$$\Rightarrow Z \leq \sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij}, \forall j = \overline{1, n} \Leftrightarrow -\sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij} + Z \leq 0, \forall j = \overline{1, n}.$$

Khi đó dạng toán học của bài toán sẽ là:

Tìm ma trận $X = (x_{ij})_{m \times n}$ và Z sao cho

$$Z \rightarrow \max \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1, \forall i = \overline{1, m} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij} + Z \leq 0, \forall j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} x_{ij} \geq 0, \forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n}; Z \geq 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Bài toán (4.1) - (4.4) là bài toán QHTT.

Định nghĩa 4.1. Bài toán qui hoạch tuyến tính có dạng toán học (4.1) (4.2) (4.3) (4.4) với giả thiết $a_{ij} \geq 0, \forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n}$ được gọi là *bài toán sản xuất đồng bộ*.

Xuất phát từ thực tế, ta có hẹp phạm vi nghiên cứu của bài toán sản xuất đồng bộ như sau: với mỗi i , mỗi j đều tồn tại $a_{ij} > 0$, nghĩa là mỗi chi tiết j phải được sản xuất bởi ít nhất là một máy và mỗi máy i phải sản xuất được ít nhất một loại chi tiết.

Trong trường hợp tổng quát: Nếu máy loại i có t_i chiếc tham gia vào quá trình sản xuất thì ta coi như chỉ có một chiếc máy loại này, nhưng năng suất được quy ước lại là $a'_{ij} = t_i a_{ij}, \forall j = \overline{1, n}$.

Nếu chi tiết j có k_j (đơn vị chi tiết j) cấu thành nên sản phẩm thì ta coi như chi tiết j chỉ có một đơn vị, nhưng năng suất được quy ước lại là:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{k_j}, \forall i = \overline{1, m}.$$

Vì những lý do trên, về mặt lý thuyết ta chỉ cần nghiên cứu phương pháp giải bài toán sản xuất đồng bộ như đã cho là đủ.

$$\begin{cases} u_i - a_{ij}v_j \geq 0, \forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n v_j \geq 1 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} u_i \geq 0, v_j \geq 0, \forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (4.8)$$

Các cặp điều kiện đối ngẫu:

$$\begin{cases} x_{ij} \geq 0 & \text{và } u_i - a_{ij}v_j \geq 0, \forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n} \\ Z \geq 0 & \text{và } \sum_{j=1}^n v_j \geq 1 \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1 & \text{và } u_i \geq 0, \forall i = \overline{1, m} \\ -\sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij} + Z \leq 0 & \text{và } v_j \geq 0, \forall j = \overline{1, n} \end{cases}$$

1.1.4. Dạng bảng của bài toán sản xuất đồng bộ

Bảng 4.1

A_{11} x_{11}	a_{12} x_{12}	...	a_{1j} x_{1j}	...	a_{1n} x_{1n}	u_1
...	...	...	...	...	...	...
a_{i1} x_{i1}	a_{i2} x_{i2}	...	a_{ij} x_{ij}	...	a_{in} x_{in}	u_i
...	...	...	...	...	...	...
a_{m1} x_{m1}	a_{m2} x_{m2}	...	a_{mj} x_{mj}	...	a_{mn} x_{mn}	u_m
V_1	v_2	...	v_j	...	v_n	

Bài toán sản xuất đồng bộ được biểu diễn dưới dạng một bảng gồm m dòng, n cột và m.n ô. Ứng với mỗi máy loại i và mỗi chi tiết j ta có một ô nằm ở dòng thứ

i và cột j , ký hiệu là ô (i, j) , trong ô này năng suất a_{ij} đặt ở góc trên bên trái, còn thời gian x_{ij} đặt ở góc dưới bên phải của ô.

1.2. Tính chất của bài toán sản xuất đồng bộ

1.2.1. Phương án của bài toán sản xuất đồng bộ

Định nghĩa 4.2. Ma trận $X = (x_{ij})_{m \times n}$ và Z thỏa mãn các ràng buộc (4.2), (4.3), (4.4) được gọi là *phương án* của bài toán sản xuất đồng bộ.

Phương án làm cho Z đạt cực đại được gọi là *phương án tối ưu* của bài toán.

Với bất kỳ ma trận $X = (x_{ij})_{m \times n}$ thỏa mãn các ràng buộc (4.2), (4.4) cũng cho tương ứng một họ phương án với Z được xác định như sau:

$$0 \leq Z \leq \min \{Z_j, j=\overline{1, n}\},$$

trong đó rõ ràng phương án có $Z = \min \{Z_j, j=\overline{1, n}\}$ là tốt hơn cả.

Do đó ta sẽ xem ma trận $X = (x_{ij})_{m \times n}$ thỏa mãn các ràng buộc (4.2), (4.4) là một phương án của bài toán sản xuất đồng bộ với Z được hiểu là:

$$Z = \min \{Z_j, j=\overline{1, n}\}.$$

1.2.2. Tính chất cơ bản của bài toán sản xuất đồng bộ

Định lý 4.1. Bài toán sản xuất đồng bộ luôn có phương án tối ưu.

Chứng minh: Nhận thấy $X = (x_{ij})$ với $x_{ij} = 1/n, \forall i=\overline{1, m}, \forall j=\overline{1, n}$ thỏa mãn điều kiện (4.2), (4.4). Vì vậy bài toán sản xuất đồng bộ luôn có phương án.

Mặt khác, vì $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1, \forall i=\overline{1, m}$ và $x_{ij} \geq 0 \forall i, j$ nên $0 \leq x_{ij} \leq 1$. Từ đó suy ra

hàm mục tiêu:

$$Z = \min \left\{ \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij}, \forall j = \overline{1, n} \right\} \leq \min \left\{ \sum_{i=1}^m a_{ij}, \forall j = \overline{1, n} \right\} = C$$

bị chặn trên bởi C trên tập phương án nên bài toán có phương án tối ưu.

Định lý 4.2. Trong phương án tối ưu của bài toán sản xuất đồng bộ thì Z luôn dương.

Chứng minh: Theo giả thiết $a_{ij} > 0, \forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n}$, đồng thời mỗi sản phẩm thứ i phải được sản xuất trên ít nhất một máy j , nên mỗi i đều tồn tại j để $x_{ij} > 0$. Do vậy từ:

$$Z = \min \{Z_j, j = \overline{1, n}\} = \min \{Z_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij}, \forall j = \overline{1, n}\}$$

cho ta thấy $Z > 0$.

Định lý 4.3. Trong toán sản xuất đồng bộ hạng của ma trận hệ số các ràng buộc chính là $m + n$.

Chứng minh: Ký hiệu D_i véc tơ dòng thứ i của ma trận A với $i = \overline{1, m+n}$, ta chứng minh hệ $m + n$ véc tơ dòng này độc lập tuyến tính. Xét đẳng thức sau:

$$\alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 + \dots + \alpha_{m+n} D_{m+n} = 0$$

trong đó 0 là véc tơ không $m.n + 1$ chiều.

Giả sử $\alpha_1 \neq 0$, ta có thể giả sử $\alpha_1 = 1$ (vì nếu không, ta chỉ việc chia cả hai vế của đẳng thức trên cho $\alpha_1 \neq 0$). Từ thành phần thứ nhất của đẳng thức trên ta có $1 - \alpha_{m+1} a_{11} = 0$, suy ra $\alpha_{m+1} > 0$, tương tự ta có $\alpha_{m+j} > 0, \forall j = \overline{2, n}$. Từ thành phần cuối cùng của thứ $m.n + 1$ của đẳng thức trên ta có $\sum_{j=1}^n \alpha_{m+j} = 0$. Suy ra tổng các số dương bằng 0 , vô lý. Vì vậy $\alpha_1 = 0$.

Lý luận tương tự, ta có $\alpha_i = 0, i = 2, 3, \dots, m$.

Từ n thành phần đầu tiên của đẳng thức trên ta suy $\alpha_{m+j} = 0, \forall j = \overline{1, n}$.

Như vậy $\alpha_i = 0, \forall i = \overline{1, m+n}$ hay hệ $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ độc lập tuyến tính. Ta có điều phải chứng minh.

Định lý 4.4. Nếu hệ thống số $\{(u_i, v_j): i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$ là phương án của bài toán đối ngẫu thì $u_i > 0, \forall i = \overline{1, m}$.

Chứng minh: Từ (4.7) và (4.8) suy ra $\exists v_j > 0$, kết hợp với (4.1.6) và $a_{ij} > 0, \forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n}$, ta suy ra $u_i > 0, \forall i = \overline{1, m}$.

Nhận xét. Nếu $X^* = (x_{ij}^*)_{m \times n}$ và $\{(u_i^*, v_j^*) : i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$ là phương án tối ưu của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu thì

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^* = 1, \forall i = \overline{1, m} \text{ và } \sum_{j=1}^n v_j^* = 1.$$

Theo Định lý 4.2, Định lý 4.4 và Định lý lệch – bù ta có điều phải chứng minh.

Định lý 4.5. Nếu hệ thống số $\{(u_i^*, v_j^*) : i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu thì $v_j^* > 0, \forall j = \overline{1, n}$.

Chứng minh: Giả sử ngược lại tồn tại $v_{j_0}^* = 0$, vì $u_i^* > 0, \forall i = \overline{1, m}$, nên $u_i^* - a_{ij_0} v_{j_0}^* > 0, \forall i = \overline{1, m}$. Theo Định lý lệch bù thì phương án tối ưu của bài toán gốc phải thỏa mãn $x_{ij_0}^* = 0, \forall i = \overline{1, m}$, do đó chi tiết j_0 không có, tức là $Z = 0$, mâu thuẫn với định lý 4.2. Vậy $v_j^* > 0, \forall j = \overline{1, n}$.

Hệ quả. Nếu $X^* = (x_{ij}^*)_{m \times n}$ và $\{(u_i^*, v_j^*) : i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$ là phương án tối ưu của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu thì

$$-\sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij}^* + Z^* = 0, \forall j = \overline{1, n}.$$

Điều này có nghĩa là nếu X^* là phương án tối ưu thì số các chi tiết sản xuất ra phải bằng nhau ($Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n$).

Hệ quả trên được suy ra từ định lý 4.5 và định lý lệch – bù.

Định lý 4.6. Nếu hệ thống số $\{(u_i, v_j) : i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$ là phương án cực biên của

bài toán đối ngẫu thì $\sum_{j=1}^n v_j = 1$.

Chứng minh: Giả sử $\{(u_i^*, v_j^*) : i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$ là phương án cực biên của bài toán

đôi ngẫu mà không thỏa mãn $\sum_{j=1}^n v_j = 1$. Khi đó nó phải thỏa mãn $m + n$ ràng buộc

chặt độc lập tuyến tính dạng: $u_i - a_{ij}v_j = 0$, với $\forall i \in I_1, \forall j \in J_1$

$$v_k = 0, \text{ với } \forall k \in J_2,$$

trong đó I_1, J_1, J_2 là tập chỉ số nào đó thỏa mãn

$$I_1 \subset \{1, 2, \dots, m\}; J_1, J_2 \subset \{1, 2, \dots, n\} \text{ và } J_1 \cap J_2 = \emptyset$$

Hệ trên có duy nhất một nghiệm tầm thường:

$$u_i = 0 \forall i \in I_1; v_j = 0, \forall j \in J_1 \cup J_2.$$

Điều này mâu thuẫn với định lý 4.4 nói rằng $u_i > 0, \forall i = \overline{1, m}$. Vậy $\sum_{j=1}^n v_j = 1$.

Chú ý. Định lý 4.6 vẫn đúng trong trường hợp tồn tại $a_{ij} = 0$, chỉ cần:

$$\max\{a_{ij}, \forall i = \overline{1, m}\} > 0, \forall j = \overline{1, n} \text{ và } \max\{a_{ij}, \forall j = \overline{1, n}\} > 0, \forall i = \overline{1, m}.$$

Nhận xét. Giả sử $\{(u_i, v_j) : i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$ là phương án tùy ý của bài toán đôi

ngẫu mà $\sum_{j=1}^n v_j = 1$, ta sẽ trực tiếp suy ra phương án $\{(u_i', v_j') : i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$ thỏa

mãn $\sum_{j=1}^n v_j' = 1$ nhờ phép biến đổi tỷ lệ sau:

$$\begin{cases} u_i' = \lambda u_i, i = \overline{1, m} \\ v_j' = \lambda v_j, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

trong đó $\lambda = \frac{1}{\sum_{j=1}^n v_j} < 1$. Khi đó giá trị hàm mục tiêu mới là:

$$w' = \sum_{i=1}^m u_i' = \sum_{i=1}^m \lambda u_i = \lambda \sum_{i=1}^m u_i = \frac{\sum_{i=1}^m u_i}{\sum_{j=1}^n v_j} = \frac{w}{\sum_{j=1}^n v_j} < w,$$

tức là phương án $\{(u_i', v_j'), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$ tốt hơn phương án cũ. Tuy nhiên, ta sẽ coi hai phương án này là tương đương nhau theo nghĩa từ phương án này trực tiếp suy ra được phương án kia nhờ một phép biến đổi tỷ lệ, vì vậy ta có coi chúng như chỉ là một phương án.

Tổng quát hơn, các phương án $\{(u_i, v_j) : i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$ chỉ khác nhau một thừa số nhân được coi như là một.

Từ định lý 4.5 và định lý 4.6 suy ra để tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu ta chỉ cần tìm nó trong số các phương án của bài toán đối ngẫu làm thỏa mãn chặt $m + n - 1$ ràng buộc chặt độc lập tuyến tính dạng $u_i - a_{ij} v_j = 0$

(mỗi dòng và mỗi cột đều phải có ít nhất một ô (i, j) mà $u_i - a_{ij} v_j = 0$)

Định lý 4.7. Tập hợp $m + n - 1$ ô ứng với $m + n - 1$ đẳng thức độc lập tuyến tính dạng $u_i - a_{ij} v_j = 0$ khi và chỉ khi nó không chứa vòng.

Do vậy, phương án thỏa mãn chặt $m + n - 1$ ràng buộc chặt độc lập tuyến tính $u_i - a_{ij} v_j = 0$ được gọi là phương án cực biên suy rộng của bài toán đối ngẫu (4.1.5) – (4.1.8), với giá trị hàm mục tiêu tương ứng là:

$$W = \frac{\sum_{i=1}^m u_i}{\sum_{j=1}^n v_j}$$

Mỗi phương án cực biên suy rộng của bài toán đối ngẫu được gọi là hệ thống nhân tử của bài toán sản xuất đồng bộ, các số u_i được gọi là nhân tử của dòng i , các số v_j được gọi là nhân tử của cột j .

2. PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ GIẢI BÀI TOÁN SẢN XUẤT ĐỒNG BỘ

2.1. Phương pháp tìm phương án cực biên suy rộng ban đầu

Trên bảng năng suất, tìm ô có năng suất lớn nhất. Giả sử ô đó là ô (i_0, j_0) , ta cho cột j_0 nhân tử cột $v_{j_0} = 1$, nhân tử của các dòng và các cột khác được tính theo nguyên tắc sau:

- Nếu cột k đã có nhân tử, dò theo cột ấy, tìm ô có năng suất cao nhất trên những dòng chưa có nhân tử, viết nhân tử cho dòng chứa ô ấy theo công thức:

$$u_i = \max \{a_{ij}v_j \text{ với mọi cột } j \text{ đã có nhân tử}\}. \quad (4.1)$$

Ô tương ứng với tích lớn nhất này được lấy làm ô chọn.

- Nếu dòng l đã có nhân tử, dò theo dòng ấy, tìm ô có năng suất cao nhất trên những cột chưa có nhân tử, viết nhân tử cho cột chứa ô ấy theo công thức:

$$v_j = \min \left\{ \frac{u_i}{a_{ij}} : \text{với mọi dòng } i \text{ đã có nhân tử} \right\}. \quad (4.2)$$

Ô tương ứng với thương nhỏ nhất này được lấy làm ô chọn.

Áp dụng nguyên tắc trên sau một số hữu hạn bước lặp ta tìm được hệ thống $m + n$ số $(u_i, v_j) : i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Chú ý. Nếu cực đại (4.1) hoặc cực tiểu (4.2) đạt tại nhiều ô thì có thể lấy một trong các ô đó làm ô chọn.

Định lý 4.8. *Hệ thống $m + n$ số $(u_i, v_j) : i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ tìm được theo phương pháp trên là một phương án cực biên của bài toán đối ngẫu.*

Chứng minh: Từ các bước xác định u_i, v_j ta có

$$u_i - a_{ij}v_j \geq 0, u_i > 0, v_j > 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n},$$

còn tại các ô chọn thì $u_i - a_{ij}v_j = 0$.

Ngoài ra cũng theo phương pháp trên, các ô chọn không tạo thành vòng. Trừ ô đầu tiên (i_0, j_0) là ứng với hai nhân tử u_{i_0}, v_{j_0} , còn sau đó có thêm một nhân tử dòng hoặc cột thì ta có thêm một ô chọn. Vì vậy số ô chọn bao giờ cũng là $m + n - 1$. Do đó hệ thống $m + n$ số $(u_i, v_j) : i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ làm thỏa mãn $m + n - 1$ đẳng thức độc lập tuyến tính, vì vậy hệ thống số tìm được theo phương pháp trên lập thành một phương án cực biên của bài toán đối ngẫu.

Ký hiệu tập các ô chọn là H , khi đó ta có

$$u_i - a_{ij}v_j \geq 0 \Leftrightarrow (i, j) \notin H \quad (4.3)$$

$$u_i - a_{ij}v_j = 0 \Leftrightarrow (i, j) \in H \quad (4.4)$$

$$u_i > 0, v_j > 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \quad (4.5)$$

Ví dụ 4.1: Tìm hệ thống nhân tử của bài toán sản xuất đồng bộ cho như bảng 4.2.

Bảng 4.2

50	100	96	40
60	99	70	41
45	70	72	25
57	80	65	38

- Ô (1, 2) có năng suất là 100, cho $v_2 = 1$.

- Trên cột 1 ô (1, 2) có năng suất cao nhất trên các dòng chưa có nhân tử nên:

$$u_1 = \max\{100.1\} = 100,$$

đạt tại ô (1, 2) nên lấy ô (1, 2) làm ô chọn và đánh dấu như bảng 4.3.

Bảng 4.3

50	100 *	96 *	40	$u_1 = 100$
60 *	99	70	41 *	$u_2 = 100$
45 *	70	72 *	25	$u_3 = 75$
57 *	80	65	38	$u_4 = 95$
$v_1 = 5/3$	$V_2 = 1$	$V_3 = 25/24$	$v_4 = 100/41$	

- Trên dòng 1 ô (1, 3) có năng suất cao nhất trên các cột chưa có nhân tử nên:

$$v_3 = \min\left\{\frac{100}{96}\right\} = \frac{25}{24},$$

đạt tại ô (1, 3) nên lấy ô (1, 3) làm ô chọn và đánh dấu như bảng.

- Trên cột 3 ô (3, 3) có năng suất cao nhất trên các dòng chưa có nhân tử nên:

$$u_3 = \max\left\{70.1; 72. \frac{25}{24}\right\} = 75,$$

đạt tại ô (3, 3) nên lấy ô (3, 3) làm ô chọn và đánh dấu như bảng.

- Trên dòng 3 ô (3, 1) có năng suất cao nhất trên các cột chưa có nhân tử nên:

$$v_1 = \min \left\{ \frac{100}{50}, \frac{75}{45} \right\} = \frac{5}{3},$$

đạt tại ô (3, 1) nên lấy ô (3, 1) làm ô chọn và đánh dấu như bảng.

- Trên cột 1 ô (2, 1) có năng suất cao nhất trên các dòng chưa có nhân tử nên:

$$u_2 = \max \left\{ 60 \cdot \frac{5}{3}, 99 \cdot 1, 70 \cdot \frac{25}{24} \right\} = 100,$$

đạt tại ô (2, 1) nên lấy ô (2, 1) làm ô chọn và đánh dấu như bảng.

- Trên dòng 2 ô (2, 4) có năng suất cao nhất trên các cột chưa có nhân tử nên:

$$v_4 = \min \left\{ \frac{100}{40}, \frac{100}{41}, \frac{75}{25} \right\} = \frac{100}{41},$$

đạt tại ô (2, 4) nên lấy ô (2, 4) làm ô chọn và đánh dấu như bảng.

- Trên cột 4 ô (4, 4) có năng suất cao nhất trên các dòng chưa có nhân tử nên:

$$u_4 = \max \left\{ 57 \cdot \frac{5}{3}, 80 \cdot 1, 65 \cdot \frac{25}{24}, 38 \cdot \frac{100}{41} \right\} = 95,$$

đạt tại ô (4, 1) nên lấy ô (4, 1) làm ô chọn và đánh dấu như bảng.

2.2. Xây dựng hệ thống số kiểm tra và tiêu chuẩn tối ưu

Ta tính x_{ij} và Z nhờ phương án cực biên (u_i, v_j) của bài toán đối ngẫu theo các phương trình sau:

$$x_{ij} = 0, (i, j) \notin H \quad (4.6)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \forall i = \overline{1, m} \quad (4.7)$$

$$-\sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij} + Z = 0, \forall j = \overline{1, n}. \quad (4.8)$$

Từ (4.8) ta có $Z = \sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij}, \forall j = \overline{1, n}$, từ (4) ta có $a_{ij} = \frac{u_i}{v_j}$ ở các ô chọn, $x_{ij} = 0$

ở các ô loại nên $Z = \sum_{i=1}^m \frac{u_i}{v_j} x_{ij} = \frac{1}{v_j} \sum_{i=1}^m u_i x_{ij}, \forall j = \overline{1, n}$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n v_j Z = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m u_i x_{ij} \right)$$

$$\Rightarrow Z \sum_{j=1}^n v_j = \sum_{i=1}^m u_i \quad (\text{Do (4.7)})$$

$$\Rightarrow Z = \frac{\sum_{i=1}^m u_i}{\sum_{j=1}^n v_j} = W$$

Khi có Z ta tính tiếp x_{ij} theo các phương trình (4.6), (4.7), (4.8).

- Nếu $x_{ij} \geq 0, \forall (i, j)$ thì hệ thống nhân tử tương ứng là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu, do đó ma trận $X = (x_{ij})$ là phương án tối ưu của bài toán sản xuất đồng bộ đã cho.

- Nếu tồn tại ô chọn (i, j) mà $x_{ij} < 0$ thì hệ thống nhân tử tương ứng chưa phải là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Trong trường hợp này ma trận $X = (x_{ij})$ được gọi là giả phương án của bài toán sản xuất đồng bộ đã cho.

$X = (x_{ij})$ được gọi là hệ thống số kiểm tra của phương án cực biên của bài toán đối ngẫu.

2.3. Điều chỉnh phương án

Giả sử trong giả phương án $X = (x_{ij})$ tồn tại ô chọn (i_1, j_1) mà $x_{i_1 j_1} < 0$, khi đó ta xây dựng phương án cực biên – bộ số nhân tử mới (u'_i, v'_j) không xấu hơn phương án cực biên cũ (u_i, v_j) . Muốn vậy ta tìm cách loại bỏ ô (i_1, j_1) khỏi tập các ô chọn, bổ sung ô chọn mới thay thế.

Trước hết ta sửa lại hệ thống nhân tử sao cho từ đẳng thức $u_i - a_{ij}v_j = 0$ trở thành $u'_i - a_{ij}v'_j \geq 0$. Muốn vậy ta thực hiện phép biến đổi sau:

- Tại ô (i_1, j_1) ta giữ nguyên $v'_{j_1} = v_{j_1}$, còn $u'_i = \lambda u_i (\lambda \geq 1)$, nghĩa là giữ nguyên nhân tử cột và sửa nhân tử dòng.

- Các ô chọn khác, sau phép điều chỉnh vẫn là ô chọn, vì vậy đẳng thức $u'_i - a_{ij}v'_j = 0$ vẫn phải thực hiện. Muốn vậy ta xét ô chọn (i, j) nào có nhân tử dòng $u'_i = \lambda u_i$ thì $v'_j = \lambda v_j$, ô chọn (i, j) nào có nhân tử cột $v'_j = \lambda v_j$ thì $u'_i = \lambda u_i$.

Ta chia tập hợp các ô của bảng thành 4 nhóm sau:

- Nhóm 1: Gồm các ô mà cả nhân tử dòng và cột đều tăng lên λ lần, vì vậy bất đẳng thức $u'_i - a_{ij}v'_j \geq 0$ vẫn đúng với mọi λ .

- Nhóm 2: Gồm các ô mà nhân tử dòng tăng lên λ lần, nhân tử cột giữ nguyên, vì vậy bất đẳng thức $u'_i - a_{ij}v'_j \geq 0$ vẫn đúng với mọi $\lambda \geq 1$.

- Nhóm 4: Gồm các ô mà cả nhân tử dòng và nhân tử cột giữ nguyên, bất đẳng thức $u'_i - a_{ij}v'_j \geq 0$ đúng.

- Nhóm 3: Gồm các ô loại mà nhân tử dòng giữ nguyên, nhân tử cột tăng lên λ lần.

Để sau khi sửa hệ thống thế vị $\{(u'_i, v'_j): i=\overline{1, m}; j=\overline{1, n}\}$ vẫn là phương án ta phải chọn λ sao cho $u'_i - a_{ij}v'_j = u_i - \lambda a_{ij}v_j \geq 0$, với mọi ô (i, j) thuộc nhóm 3, ký

hiệu nhóm này là A. Suy ra $\lambda \leq \frac{u_i}{a_{ij}v_j}, \forall (i, j) \in A$.

Do $u_i - a_{ij}v_j \geq 0$ nên $\lambda \geq 1$. Vậy $1 \leq \lambda \leq \frac{u_i}{a_{ij}v_j}, \forall (i, j) \in A$.

Muốn phương án $\{(u'_i, v'_j): i=\overline{1, m}; j=\overline{1, n}\}$ là phương án cực biên thì phải có thêm ô chọn mới lấy thêm ở các ô loại cũ và chỉ chọn thêm được ở tập hợp A, ta

chọn $\lambda = \min \left\{ \frac{u_i}{a_{ij} v_j}, \forall (i, j) \in A \right\}$. Giả sử cực tiểu đạt tại $\hat{o} (i_2, j_2)$. Khi đó $\hat{o} (i_2, j_2)$

được lấy làm $\hat{o}$ chọn mới thay thế $\hat{o} (i_1, j_1)$ bị loại. Dễ thấy rằng $m + n - 1$ $\hat{o}$ chọn mới không chứa vòng. Người ta đã chứng minh được rằng phương án cực biên suy rộng mới tốt hơn phương án cực biên suy rộng cũ (với giả thiết bài toán đối ngẫu không suy biến thì $\lambda > 1$).

2.4. Thuật toán nhân tử giải bài toán sản xuất đồng bộ

Bước 1. Xây dựng phương án cực biên suy rộng ban đầu của bài toán đối ngẫu là $w_1 = (u_i, v_j)$ với tập $\hat{o}$ chọn H.

Bước 2. Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu.

Từ phương án cực biên suy rộng $w_1 = (u_i, v_j)$ ta thực hiện các thao tác sau:

- Tính $Z = \frac{\sum_{i=1}^m u_i}{\sum_{j=1}^n v_j}$
- Tính giả phương án $X_1 = (x_{ij})$ từ hệ

$$x_{ij} = 0, (i, j) \notin H$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \forall i = \overline{1, m}$$

$$-\sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} = Z, \forall j = \overline{1, n}.$$

+ Nếu $x_{ij} \geq 0, \forall (i, j)$ thì giả phương án X_1 là phương án cực biên tối ưu của bài toán sản xuất đồng bộ.

+ Nếu $\exists x_{ij} < 0$ thì chuyển sang bước 3.

Bước 3. Điều chỉnh nhân tử (giả sử loại $\hat{o} (i_1, j_1)$ vì có $x_{i_1 j_1} < 0$):

- Tìm tập A.
- Tìm $\lambda = \min \left\{ \frac{u_{i_r}}{a_{i_r j_k} v_{j_k}} : (i_r, j_k) \in A \right\} = \frac{u_{i_2}}{a_{i_2 j_2} v_{j_2}}$

Đưa ô (i_2, j_2) vào tập các ô chọn thay cho ô (i_1, j_1)

- Xây dựng hệ thống nhân tử mới $w_2 = (u'_i, v'_j)$ bằng cách:

+ Hoặc $u'_i = \lambda u_i, v'_j = \lambda v_j$ tại hàng i hay cột j có chữ λ .

+ Hoặc tính lại từ đầu bằng cách đặt một nhân tử $v_j = 1$ ở cột j nào đó, sau đó tính u_i, v_j theo công thức $u_i - a_{ij}v_j = 0$ với $(i, j) \in H$.

Ta có phương án cực biên w_2 tốt hơn w_1 .

Gán $w_2 = w_1$ quay trở lại bước 2. Sau hữu hạn bước lặp ta tìm được phương án tối ưu.

Chú ý: + Trường hợp bài toán đối ngẫu suy biến, có thể gặp $\lambda = 1$, khi đó ta vẫn áp dụng thuật toán bình thường nhưng kết quả không cho phương án cực biên suy rộng mới mà chỉ chuyển sang cơ sở khác của phương án ấy. Điều này có thể làm xuất hiện hiện tượng xoay vòng. Tuy nhiên trong thực tế tính toán chúng ta dễ dàng thoát khỏi hiện tượng xoay vòng.

+ Khi λ đạt tại nhiều ô khác nhau đây là dấu hiệu bài toán suy biến, khi đó ta chọn ngẫu nhiên một trong các ô đó vào làm ô chọn.

Ví dụ 4.2: Tìm phương án tối ưu của bài toán sản xuất đồng bộ với phương án cực biên suy rộng đã xây dựng được như ở ví dụ 1.

Bảng 4.4

50	100 *	96 *	40	$u_1 = 100$
60 * (-)	99	70	41 *	$u_2 = 100 \lambda$
45 *	70	72 *	25	$u_3 = 75$
57 *	80	65	38 (+)	$u_4 = 95$
$v_1 = 5/3$	$V_2 = 1$	$v_3 = 25/24$	$v_4 = 100/41 \lambda$	

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^4 u_i}{\sum_{j=1}^4 v_j} = \frac{100 + 100 + 75 + 95}{5/3 + 1 + 25/24 + 100/41} \approx 60,19$$

Nhận thấy trên cột 4 chỉ có một ô chọn (2, 4) nên $x_{24} = Z/a_{24} > 1$. Trên hàng 2 có các ô chọn (2, 1) và (2, 4) nên $x_{21} + x_{24} = 1$. Suy ra $x_{21} = 1 - x_{24} < 0$, ghi dấu (-) vào ô (2, 1) như bảng trên. Ta chuyển sang điều chỉnh phương án.

$x_{21} < 0$ nên u_2 phải sửa, đóng theo dòng 2 gặp ô chọn (2, 4) vì vậy nhân tử cột v_4 phải sửa. Đóng theo cột 4 không gặp ô chọn nào nữa, vì vậy các nhân tử khác giữ nguyên (những nhân tử phải sửa ta viết thêm chữ λ vào cạnh bên để đánh dấu như ở bảng trên).

$$A = \{(1, 4), (3, 4), (4, 4)\}, \lambda = \min \left\{ \frac{100}{40 \cdot \frac{100}{41}}, \frac{75}{25 \cdot \frac{100}{41}}, \frac{95}{38 \cdot \frac{100}{41}} \right\} = \frac{41}{40}.$$

Cực tiểu đạt tại ô (1, 4) và (4, 4). Lấy một trong 2 ô này làm ô chọn mới thay thế ô (2, 1) bị loại, chẳng hạn ô (4, 4), ghi dấu (+) vào ô (4, 4) như bảng trên.

Xây dựng bảng mới với hệ thống ô chọn mới, hệ thống nhân tử mới theo một trong hai cách: Hoặc $u'_i = \lambda u_i, v'_j = \lambda v_j$ tại hàng i hay cột j có chữ λ , hoặc tính lại từ đầu bằng cách đặt một nhân tử cột $v_j = 1$ nào đó.

Bảng 4.5

50	100 *	96 *	40	$u_1 = 100$
60	99	70	41 *	$u_2 = 102,5$
45 *	70	72 *	25	$u_3 = 75$
57 *	80	65	38 *	$u_4 = 95$
$v_1 = 5/3$	$V_2 = 1$	$v_3 = 25/24$	$v_4 = 5/2$	

$$\text{Ta có } Z = \frac{\sum_{i=1}^4 u_i}{\sum_{j=1}^4 v_j} = \frac{100 + 102,5 + 75 + 95}{5/3 + 1 + 25/24 + 5/2} = 60.$$

$$x_{12} + x_{13} = 1$$

$$x_{24} = 1$$

$$x_{31} + x_{33} = 1$$

$$x_{41} + x_{44} = 1$$

$$45x_{31} + 57x_{41} = 60$$

$$100x_{12} = 60$$

$$96x_{13} + 72x_{33} = 60$$

$$41x_{24} + 38x_{44} = 60$$

Giải hệ trên ta tìm được: $x_{24} = 1$; $x_{44} = 0,5$; $x_{41} = 0,5$; $x_{31} = 0,7$;

$$x_{33} = 0,3; x_{13} = 0,4; x_{12} = 0,6.$$

Do mọi $x_{ij} \geq 0$ nên phương án tối ưu cần tìm của bài toán đã cho là

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

với số sản phẩm đủ bộ sản xuất ra được nhiều nhất là $f_{\max} = 60$.

II. BÀI TOÁN TRÒ CHƠI MA TRẬN

1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1.1. Ví dụ về trò chơi ma trận

+ Quy tắc chơi: Hai đối thủ P và Q cùng chơi, mỗi người đều có một viên bi trắng (T) và một viên bi xanh (X). Cùng một lúc (bằng hiệu lệnh nào đó) mỗi người lấy ra một viên bi và đặt nó lên bàn.

+ Cách trả tiền: Q trả cho P 1 đồng nếu hai viên bi chọn ra cùng màu, hoặc – 1 đồng (nghĩa là P trả cho Q 1 đồng) nếu hai viên bi chọn ra khác màu. Trong trường hợp đầu ta nói P thắng, Q thua; trường hợp sau ta nói Q thắng, P thua. Trò chơi cứ tiếp tục như thế.

Số tiền trả 1 hay – 1 biểu thị số thu nhập hay số tổn thất của P. P mong muốn làm cực đại số thu nhập của mình nên P được gọi là *người chơi max*, còn Q mong muốn làm cực tiểu số thu nhập của đối thủ P (hay là cực tiểu số tổn thất của mình) nên Q được gọi là *người chơi min*.

+ Ma trận trò chơi: được thể hiện như bảng 4.6.

Bảng 4.6

P \ Q	S	N
	S	N
S	1	-1
N	-1	1

Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ được gọi là *ma trận thu hoạch* hay *ma trận thắng*

hay *ma trận trả tiền* của P.

Ví dụ trên là một dạng của trò chơi ma trận hay còn gọi là *trò chơi đối kháng hai đối thủ với tổng 0* (số thu hoạch của người này bằng số tổn thất của người kia).

1.2. Bài toán trò chơi ma trận

Định nghĩa 4.3. *Trò chơi ma trận* là trò chơi được xác định bởi ma trận m hàng, n cột $A = (a_{ij})_{m \times n}$ với a_{ij} là số thực tùy ý cho trước. Ma trận A được gọi là *ma trận thắng* (hay *ma trận thu hoạch*, hay *ma trận trả tiền*). Phần tử a_{ij} biểu thị mức độ

thắng (chẳng hạn số tiền mà Q phải trả cho P, thắng thì $a_{ij} > 0$, thua thì $a_{ij} < 0$, hòa thì $a_{ij} = 0$) của P nếu P chọn cách chơi thứ i , còn Q chọn cách chơi thứ j . Đối với người chơi P thì A là ma trận thắng (hay ma trận thu hoạch, hay ma trận trả tiền), ngược lại đối với người chơi Q thì $-A$ là ma trận thắng (hay ma trận thu hoạch, hay ma trận trả tiền).

Định nghĩa 4.4. Với mỗi $i = 1, 2, \dots, m$, véc tơ đơn vị thứ i

$$X = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$$

với số 1 ở tọa độ thứ i , được gọi là *chiến lược đơn thứ i* của P. Véc tơ chiến lược thứ i biểu thị việc người chơi P chọn hàng i của ma trận A . Để đơn giản, thay vì nói chiến lược đơn thứ i ta nói chiến lược i .

Tương tự, Với mỗi $j = 1, 2, \dots, n$, véc tơ đơn vị thứ j

$$X = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

với số 1 ở tọa độ thứ j , được gọi là *chiến lược đơn thứ j* của Q. Véc tơ chiến lược thứ j biểu thị việc người chơi Q chọn hàng j của ma trận A . Để đơn giản, thay vì nói chiến lược đơn thứ j ta nói chiến lược j .

Chú ý rằng trong các trò chơi ma trận, thông tin về cách chơi của mỗi đối thủ cần được giữ kín. Ở mỗi lần chơi, các đối thủ không chọn cố định một chiến lược đơn (hàng, cột) cụ thể nào mà sẽ lựa chọn phối hợp các hàng (cột) theo tỷ lệ (xác suất) nào đó. Vì thế, ta đi đến khái niệm chiến lược hỗn hợp.

Định nghĩa 4.5. Véc tơ $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ với $x_i \geq 0, i = \overline{1, m}$ và $x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$, trong đó x_i biểu thị xác suất để P chọn cách chơi thứ i , được gọi là *chiến lược hỗn hợp* của P.

Tương tự, Véc tơ $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ với $y_j \geq 0, j = \overline{1, n}$ và $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$, trong đó y_j biểu thị xác suất để Q chọn cách chơi thứ j , được gọi là *chiến lược hỗn hợp* của Q.

1.3. Hàm thu hoạch của P

Khi P chọn chiến lược hỗn hợp $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ và Q chọn chiến lược hỗn hợp $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ thì phần thắng của P (cũng là phần thua của Q) được tính như sau:

Nếu Q chọn chiến lược đơn thứ nhất (cột 1 của A) thì kỳ vọng thắng cuộc của P là: $a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m = \sum_{i=1}^m a_{i1}x_i$.

Nếu Q chọn chiến lược đơn thứ hai (cột 2 của A) thì kỳ vọng thắng cuộc của P là: $a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m = \sum_{i=1}^m a_{i2}x_i$.

...

Nếu Q chọn chiến lược đơn thứ n (cột n của A) thì kỳ vọng thắng cuộc của P là: $a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m = \sum_{i=1}^m a_{in}x_i$.

Do Q chọn chiến lược hỗn hợp $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ nên kỳ vọng thắng cuộc của P là:

$$E(X, Y) = y_1 \sum_{i=1}^m a_{i1}x_i + y_2 \sum_{i=1}^m a_{i2}x_i + \dots + y_n \sum_{i=1}^m a_{in}x_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i \right) y_j.$$

Định nghĩa 4.6. *Hàm thu hoạch* hay *số thu hoạch* của P là số thực

$$E(X, Y) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i \right) y_j,$$

trong đó $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ và $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ tương ứng là chiến lược hỗn hợp bất kỳ của P và Q.

Ví dụ 4.3: Xét trò chơi cho bởi ma trận chữ nhật ($m = 3, n = 4$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Xét cặp chiến lược $X = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \right)$ và $Y = \left(\frac{1}{1} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \right)$. Tính số thu

hoạch của P?

Q chọn cột 1: kỳ vọng thắng của P là: $1 \times 1/2 + 5 \times 1/4 + 3 \times 1/4 = 2,5$.

Q chọn cột 2: kỳ vọng thắng của P là: $3 \times 1/2 + 4 \times 1/4 - 1 \times 1/4 = 2,25$.

Q chọn cột 3: kỳ vọng thắng của P là: $3 \times 1/2 + 0 \times 1/4 + 2 \times 1/4 = 2$.

Q chọn cột 1: kỳ vọng thắng của P là: $2 \times 1/2 + 1 \times 1/4 + 4 \times 1/4 = 2,25$.

Vậy số thu hoạch của P là:

$$E(X, Y) = 2,5 \times 1/4 + 2,25 \times 1/4 + 2 \times 1/4 + 2,25 \times 1/4 = 2,25.$$

2. ĐIỂM YÊN NGỰA VÀ CHIẾN LƯỢC TỐI ƯU

2.1. Điểm yên ngựa

Xét trò chơi cho bởi ma trận trả tiền $A = (a_{ij})$. Nếu P chọn chiến lược đơn thứ i thì P tin chắc sẽ nhận được số thu hoạch ít nhất là $\min_j a_{ij}$.

Do P có thể chọn chiến lược đơn bất kỳ nên P sẽ chọn chiến lược đơn làm cực đại số thắng cuộc, nghĩa là P sẽ chọn i sao cho $\min_j a_{ij}$ là lớn nhất. Bằng cách chọn chiến lược đơn này, P bảo đảm thắng ít nhất là $\max_i \min_j a_{ij}$.

Tương tự, nếu Q chọn chiến lược đơn j , Q tin chắc số tiền phải trả (tổn thất) nhiều nhất là $\max_i a_{ij}$. Như vậy Q sẽ cách chọn chiến lược đơn làm cực tiểu số tổn thất của mình. Bằng cách chọn chiến lược đơn này Q có thể giữ cho P thắng nhiều nhất (Q thua ít nhất) là $\min_j \max_i a_{ij}$.

Định nghĩa 4.7. Nếu ma trận trả tiền A thỏa mãn điều kiện:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{hk} = v,$$

thì ta nói rằng trò chơi ma trận có *điểm yên ngựa* và *giá* của điểm yên ngựa là phần tử $a_{hk} = v$.

Khi trò chơi có điểm yên ngựa a_{hk} , P sẽ thắng ít nhất v , nếu P chọn chiến lược đơn h và Q sẽ thua nhiều nhất là v , nếu Q chọn chiến lược đơn k . Khi đó h là chiến lược tối ưu cho P và k là chiến lược tối ưu cho Q.

Ví dụ 4.4: Cho trò chơi với ma trận trả tiền

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ta có: $\min_j a_{1j} = a_{11} = a_{13} = 1$, $\min_j a_{2j} = a_{23} = 0$, $\min_j a_{3j} = a_{33} = 2$ và

$$\max_i \min_j a_{ij} = 2 = a_{33}.$$

$\max_i a_{i1} = a_{21} = 5$, $\max_i a_{i2} = a_{22} = 4$, $\max_i a_{i3} = a_{33} = 2$, $\max_i a_{i4} = a_{34} = 3$ và

$$\min_j \max_i a_{ij} = 2 = a_{33}.$$

Vậy giá của điểm yên ngựa là $a_{33} = 2 = v$, ứng với cặp chiến lược đơn $X = (0, 0, 1)$ và $Y = (0, 0, 1, 0)$.

Ta nhận xét rằng a_{33} là vừa là phần tử nhỏ nhất trên hàng 3, vừa là phần tử lớn nhất trên cột 3. Bất cứ điểm yên ngựa nào cũng có tính chất này.

Tổng quát, ta có nếu $a_{hk} = v$ là giá của điểm yên ngựa thì h là chiến lược đơn tối ưu của P và k là chiến lược đơn tối ưu của Q .

Tuy nhiên không phải trò chơi ma trận nào cũng có điểm yên ngựa, nghĩa là có chiến lược đơn tối ưu. Vì thế ta đi đến khái niệm chiến lược hỗn hợp tối ưu.

2.2. Chiến lược tối ưu

Định nghĩa 4.8. *Nghiệm* của trò chơi ma trận là cặp chiến lược hỗn hợp $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$, $\bar{Y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$ và số thực v , ký hiệu $E(\bar{X}, \bar{Y}, v)$ sao cho:

- $E(\bar{X}, \bar{Y}) = v$,
- $E(\bar{X}, j) \geq v$ với mọi chiến lược đơn $j = 1, 2, \dots, n$,
- $E(i, \bar{Y}) = v$ với mọi chiến lược đơn $i = 1, 2, \dots, m$.

$\bar{X}$, $\bar{Y}$ tương ứng gọi là *chiến lược tối ưu* của P và Q , v gọi là *giá* của trò chơi.

Định nghĩa trên cho thấy nếu P chọn cách chơi theo tỷ lệ cho bởi chiến lược tối ưu $\bar{X}$ thì dù Q chơi thế nào, P cũng luôn thắng ít nhất là v . Cũng vậy, nếu Q

chọn cách chơi theo tỷ lệ cho bởi chiến lược tối ưu $\bar{Y}$ thì dù P chơi thế nào, Q chỉ thua nhiều nhất là v . Giá v có thể dương, âm hoặc bằng 0.

Định lý 4.9. (Định lý minimax) Mọi trò chơi ma trận với các phần tử dương, hàm thu hoạch $E(X, Y)$ bao giờ cũng tồn tại giá tối ưu, hay ta có

$$\max_X \min_Y E(X, Y) = \min_Y \max_X E(X, Y) = v.$$

Nhận xét: 1) Mọi trò chơi ma trận, với $a_{ij} > 0$, đều có nghiệm $(\bar{X}, \bar{Y}, v)$ thỏa mãn

$$E(X, \bar{Y}) \leq E(\bar{X}, \bar{Y}) = v \leq E(\bar{X}, Y),$$

với mọi cặp chiến lược hỗn hợp X, Y .

2) Nếu ma trận trả tiền A có phần tử âm thì ta có thể thay thế nó bằng ma trận $A_p = (a_{ij} + p)$, với $a_{ij} + p > 0$, bằng cách chọn $p = 1 - \min\{a_{ij} : a_{ij} < 0\}$.

Người ta đã chứng minh được rằng các chiến lược tối ưu của cả hai trò chơi ứng với ma trận trả tiền A và A_p là như nhau, đồng thời $v_p = v + p > 0$.

2.3. Trò chơi đối xứng

2.3.1. Định nghĩa. Trò chơi *đối xứng* là trò chơi có ma trận trả tiền A thỏa mãn các điều kiện sau:

- a) A là ma trận vuông cấp n ;
- b) $a_{ii} = 0$, với mọi i ;
- c) $a_{ij} = -a_{ji}$, với mọi i, j .

Ma trận A với các tính chất a, b, c như trên gọi là ma trận đối xứng lệch.

Ví dụ 4.5: Trò chơi dân gian: “One – Two -Three” (đọc chệch là Oẳn tù tì) là một trò chơi ma trận với tập chiến lược đơn giống nhau cho cả hai đấu thủ: ở mỗi lần chơi, mỗi người chơi giơ tay ra hiệu chọn “Giấy” hoặc “Búa” hoặc “Kéo” với quy ước: Giấy thắng Búa, Búa thắng Kéo, Kéo thắng Giấy. Ma trận trả tiền có dạng:

Bảng 4.7

Q \ P	Giấy	Búa	Kéo
Giấy	0	1	-1
Búa	-1	0	1
Kéo	1	-1	0

2.3.2. Tính chất của trò chơi đối xứng

+) Nếu $X = Y$ thì $E(X, Y) = 0$, nghĩa là hai người chơi sử dụng cùng một chiến lược như nhau thì kỳ vọng thắng cuộc của họ bằng 0.

+) Giả sử chiến lược tối ưu của hai người lần lượt là $\bar{X}$ và $\bar{Y}$. Khi đó $\bar{X} = \bar{Y}$ và $v = E(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$, nghĩa là giá của trò chơi đối xứng bằng 0.

Chiến lược tối ưu cho trò chơi “Giấy – Búa – Kéo” là $\bar{X} = \bar{Y} = (1/3, 1/3, 1/3)$ với giá $v = 0$.

3. PHƯƠNG PHÁP TÌM CHIẾN LƯỢC TỐI ƯU CHO BÀI TOÁN TRÒ CHƠI MA TRẬN

3.1. Đưa trò chơi ma trận về bài toán quy hoạch tuyến tính

Xét trò chơi ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Theo định nghĩa 4 và định nghĩa 6 thì bài toán của P là tìm véc tơ $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ và số v sao cho

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq v \text{ (cộng theo cột 1),}$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq v \text{ (cộng theo cột 2),}$$

...

$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq v \text{ (cộng theo cột n),}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m.$$

Bài toán của Q là tìm véc tơ $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ và số v sao cho

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq v \text{ (cộng theo hàng 1),}$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \leq v \text{ (cộng theo hàng 2),}$$

...

$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \leq v \text{ (cộng theo hàng m),}$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1, y_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết $a_{ij} > 0$ và vì thế $v > 0$. Đặt $x'_i = \frac{x_i}{v}, i = \overline{1, m}$ và $y'_j = \frac{y_j}{v}, j = \overline{1, n}$. Ta có

$$x'_1 + x'_2 + \dots + x'_m = \frac{1}{v} \text{ và } y'_1 + y'_2 + \dots + y'_n = \frac{1}{v}.$$

Ta thấy v là số tiền mà P nhận được và v cũng là số tiền mà Q phải trả nên P tìm cách làm cực đại v hay cực tiểu $1/v$; còn Q tìm cách làm cực tiểu v hay cực đại $1/v$. Vì thế ta có cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu:

Bài toán của P :

$$\begin{aligned} f_1 &= x'_1 + x'_2 + \dots + x'_m \rightarrow \min \\ \begin{cases} a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 + \dots + a_{m1}x'_m \geq 1 \\ a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + \dots + a_{m2}x'_m \geq 1 \\ \dots \\ a_{1n}x'_1 + a_{2n}x'_2 + \dots + a_{mn}x'_m \geq 1 \\ x'_i \geq 0, i = \overline{1, m} \end{cases} \end{aligned}$$

Bài toán của Q :

$$\begin{aligned} f_2 &= y'_1 + y'_2 + \dots + y'_n \rightarrow \max \\ \begin{cases} a_{11}y'_1 + a_{12}y'_2 + \dots + a_{1n}y'_n \leq 1 \\ a_{21}y'_1 + a_{22}y'_2 + \dots + a_{2n}y'_n \leq 1 \\ \dots \\ a_{m1}y'_1 + a_{m2}y'_2 + \dots + a_{mn}y'_n \leq 1 \\ y'_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases} \end{aligned}$$

Nhận xét. + Hai bài toán trên lập thành cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu.

Hơn nữa, rõ ràng cả hai bài toán đều có phương án nên cả hai bài toán đều có

phương án tối ưu và $\min_{X'} \sum_{i=1}^m x'_i = \max_{Y'} \sum_{j=1}^n y'_j = \frac{1}{v}$.

(Số tiền thắng nhỏ nhất của P bằng số tiền thua lớn nhất của Q).

+ Chiến lược tối ưu của P_1 và P_2 tương ứng là:

$$x_i = v \times x'_i, i = \overline{1, n} \text{ và } y_j = v \times y'_j, j = \overline{1, n}.$$

3.2. Phương pháp tìm chiến lược tối ưu cho bài toán trò chơi ma trận

+ Xét ma trận A đã thỏa mãn mọi $a_{ij} > 0$, nếu chưa ta đưa ma trận A về ma trận A_p sao cho mọi $a_{ij} > 0$, bằng cách chọn

$$p = 1 - \min \{a_{ij}: a_{ij} < 0\}; A_p = (a_{ij} + p)_{m \times n}.$$

+ Viết cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu tương ứng của P và Q.

+ Giải một trong hai bài toán bằng phương pháp đơn hình hoặc đơn hình đối ngẫu. Từ đó tìm phương án tối ưu cho bài toán còn lại.

+ Từ các phương án tối ưu $X' = (x'_i)$ và $Y' = (y'_j)$ của cặp bài toán đối ngẫu ta tìm được chiến lược tối ưu $X^* = (x_i)$ và $Y^* = (y_j)$ của P và Q với

$$x_i = v_p \times x'_i, i = \overline{1, n} \text{ và } y_j = v_p \times y'_j, j = \overline{1, n}, \text{ với } v_p = 1/f_1; v^* = v_p - p$$

Ví dụ 4.6: Tìm chiến lược tối ưu của trò chơi ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ta thấy $-\min \{a_{ij}: a_{ij} < 0\} = 3$, vì thế chọn $p = 4$. Xét ma trận A_p như sau:

$$A_p = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Mọi phần tử của A_p đều dương nên $v_p > 0$. Cặp bài toán đối ngẫu của P và Q là:

$$(P) \quad f_1 = x'_1 + x'_2 + x'_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 6x'_1 + 2x'_2 + 5x'_3 \geq 1 \\ 3x'_1 + 4x'_2 + 6x'_3 \geq 1 \\ 4x'_1 + 2x'_2 + x'_3 \geq 1 \\ x'_1 \geq 0, x'_2 \geq 0, x'_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$(Q) \quad f_2 = y'_1 + y'_2 + y'_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 6y_1' + 3y_2' + 4y_3' \leq 1 \\ 2y_1' + 4y_2' + 2y_3' \leq 1 \\ 5y_1' + 6y_2' + y_3' \leq 1 \\ y_1' \geq 0, y_2' \geq 0, y_3' \geq 0 \end{cases}$$

Ta giải bài toán (Q). Đưa bài toán (Q) về dạng chính tắc như sau:

$$f_2 = -y_1' - y_2' - y_3' \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 6y_1' + 3y_2' + 4y_3' + y_4' = 1 \\ 2y_1' + 4y_2' + 2y_3' + y_5' = 1 \\ 5y_1' + 6y_2' + y_3' + y_6' = 1 \\ y_j' \geq 0, j = \overline{1, 6} \end{cases}$$

Chọn cơ sở $\{A_4, A_5, A_6\}$ với phương án cực biên xuất phát ta có bảng đơn hình như sau

Bảng 4.8

Bảng Số	Cơ sở A_i	Hệ số c_i	Tọa độ x_{io}	-1	-1	-1	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
I	A_4	0	1	6	3	4	1	0	0
	A_5	0	1	2	4	2	0	1	0
	$\Leftarrow A_6$	0	1	5	6	1	0	0	1
	$f(X) = -10$			1	1↑	1	0	0	0
II	$\Leftarrow A_4$	0	1/2	7/2	0	7/2	1	0	-1/2
	A_5	0	1/3	-4/3	0	4/3	0	1	-2/3
	A_2	-1	1/6	5/6	1	1/6	0	0	1/6
	$F(X) = -1/6$			1/6	0	5/6↑	0	0	-1/6
III	A_3	-1	1/7	1	0	1	2/7	0	-1/7
	A_5	0	1/7	-8/3	0	0	-8/21	1	-6/7
	A_2	-1	1/7	2/3	1	0	-1/21	0	4/21

	$F(X) = -2/7$	$-2/3$	0	0	$-5/21$	0	$-1/21$
--	---------------	--------	-----	-----	---------	-----	---------

Tại bảng III ta thấy $\Delta_j \leq 0, \forall j = \overline{1,6}$ nên phương án tối ưu của bài toán (Q) là: $Y' = (0, 1/7, 1/7, 0, 1/7, 0)$. Suy ra phương án tối ưu của bài toán (Q) là $Y' = (0, 1/7, 1/7)$ và $f_1 = f_1 = 2/7 = 1/v_p$.

Ta có $Y' = (0, 1/7, 1/7)$ thỏa mãn lỏng các ràng buộc sau

$$\begin{cases} y'_2 > 0 \\ y'_3 > 0 \\ 2y'_1 + 4y'_2 + 2y'_3 \leq 1 \end{cases},$$

nên theo định lý lệch bù ta có

$$\begin{cases} 3x'_1 + 4x'_2 + 6x'_3 = 1 \\ 4x'_1 + 2x'_2 + x'_3 = 1 \\ x'_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 = 5/21 \\ x'_2 = 0 \\ x'_3 = 1/21 \end{cases}.$$

Phương án tối ưu của bài toán (P) là $X' = (5/21, 0, 1/21)$.

Nghiệm của trò chơi là:

+ Chiến lược tối ưu của P là:

$$X^* = v.X' = 7/2.(5/21, 0, 1/21) = (5/6, 0, 7/42).$$

+ Chiến lược tối ưu của Q là:

$$Y^* = v.Y' = 7/2.(0, 1/7, 1/7) = (0, 1/2, 1/2).$$

+ Giá của trò chơi: $v^* = v_p - p = 7/2 - 4 = -1/2$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. **Nguyễn Quang Đông, Ngô Văn Thứ, Hoàng Đình Tuấn**, *Giáo trình mô hình toán kinh tế*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2002.
- [2]. **Trần Xuân Sinh**, *Toán kinh tế*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2007.
- [3]. **Phạm Đình Phùng, Nguyễn Văn Quý**, *Giáo trình mô hình toán kinh tế*, Nhà xuất bản tài chính Hà Nội, 2002.
- [4]. **Trần Túc**, Quy hoạch tuyến tính, Đại học Kinh tế Quốc dân, 2001.
- [5]. **Trần Vũ Thiệu**, *giáo trình tối ưu tuyến tính*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2004.